基礎数理第 1 回 (2003-10-06)

問 1.1 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ の各要素の重みを表す実数 $w_1, \dots, w_n$ が与えられているとする．S の部分集合 A に対して，$h(A) = \sum_{i \in A} w_i$ と定義される集合関数 h がモジュラ等式

$$h(A) + h(B) = h(A \cup B) + h(A \cap B)$$

を満たすことを示せ．

(答) $A \cap B \neq \emptyset$ かつ $A \setminus B \neq \emptyset$ かつ $B \setminus A \neq \emptyset$ のときは，$h(A) + h(B) = h(A \setminus B) + h(A \cap B) + h(A \setminus B) + h(A \cap B) = h(A \cup B) + h(A \cap B)$. その他の場合も同様．

問 1.2 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ の各要素の重みを表す実数 $w_1, \dots, w_n$ が与えられているとする．S の部分集合 A に対して，$f(A) = \max_{i \in A} w_i$ と定義される集合関数 f が劣モジュラ不等式

$$f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B)$$

を満たすことを示せ．

(答) $A \cap B \neq \emptyset$ かつ $A \setminus B \neq \emptyset$ かつ $B \setminus A \neq \emptyset$ のとき，$f(A \setminus B), f(A \cap B), f(B \setminus A)$ の大小関係について場合分けをすればよい．その他の場合も同様．

問 1.3 4 つの部分集合に関する包除公式

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

を示せ．

(答) $C = A_3 \cup A_4$ として，3 つの部分集合 A_1, A_2, C に関する包除公式を適用する．

以上