基礎数理第 3 回 (2003-10-27)

問 3.1 擬順序関係 $\bar{R}$ が与えられたとき，2 項関係 $\sim$ を $a \sim b \iff a\bar{R}b$ かつ $b\bar{R}a$ によって定義すると，$\sim$ は同値関係になる．その同値類 $C_1, C_2, \ldots$ に対し，2 項関係 $\leq$ を

$$C_i \leq C_j \iff a \in C_i,\ b \in C_j \text{に対し}\ a\bar{R}b$$

と定義する．このとき，関係 $\leq$ は well-defined であることを示せ．

(答) 代表元のとりかたによらないことを示せばよい．$a \in C_i$, $b \in C_j$ に対し，$a\bar{R}b$ であるとする．別の代表元 $a' \in C_i$, $b' \in C_j$ に対し，$a \sim a'$, $b \sim b'$ より，$a'\bar{R}a$, $b\bar{R}b'$ となる．したがって，$a'\bar{R}b'$ が成り立つ．

問 3.2 劣モジュラ関数[1] $\rho(X)$ の最小値を与える X 全体を $\mathcal{L}$ とすると，$\mathcal{L}$ は分配束を成すことを示せ．

(答) 任意の $X, Y \in \mathcal{L} = \{A \mid \rho(A) \leq \rho(B)\ \forall B\}$ に対して，$X \cup Y,\ X \cap Y \in \mathcal{L}$ が成り立つことを示せばよい．ρ の最小値を m とすると，$\rho(X) = \rho(Y) = m$, $\rho(X \cup Y) \geq m$, $\rho(X \cap Y) \geq m$ なので，劣モジュラ不等式 $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$ より $\rho(X \cup Y) = \rho(X \cap Y) = m$ が成り立つ．

以上

[1]集合関数 $\rho(X)$ が劣モジュラであるとは，任意の X, Y に対して，劣モジュラ不等式 $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$ が成り立つことである．