基礎数理第 5 回 (2003-11-17)

問 5.1 $a_n = 1/1^2 + 1/2^2 + \cdots + 1/n^2$ を数値計算せよ．(極限値は $\pi^2/6$)

(答) 略.

問 5.2 $[0, 1]$ 上の連続関数全体を $C[0, 1]$ とする．任意の $x, y \in C[0, 1]$ に対し，$d(x, y) = \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|$ と定義する．このとき，d は三角不等式を満たすことを示せ.

(答) 任意の $x, y, z \in C[0, 1]$ に対して，

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \quad (\forall t \in [0, 1])$$

が成り立つ．このとき，$|x(t) - z(t)| \leq d(x, z)$, $|z(t) - y(t)| \leq d(z, y)$ であるから，任意の $t \in [0, 1]$ に対して，$|x(t) - y(t)| \leq d(x, z) + d(z, y)$ が成り立つ．したがって，$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ が成り立つ.

問 5.3 S を有限集合とする．任意の $A, B \in 2^S$ に対し，$d(A, B) = |A\Delta B|$ (対称差[1] の要素数) と定義する．このとき，d は三角不等式を満たすことを示せ.

(答) $d(A, C) + d(C, B) - d(A, B) = 2(|(A \cap B) \setminus C| + |C \setminus (A \cup B)|) \geq 0.$

以上

[1]対称差 $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.