基礎数理第 6 回 (2003-12-01)

問 6.1 閉区間 $[0,1]$ 上で定義された連続関数の全体を X とし，X の要素 x, y の間の距離を

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| \mathrm{d}t$$

で定義する．また，連続関数の列 $(x_n)_n$ を

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 & (0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \\ n(t - \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \\ 1 & (\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

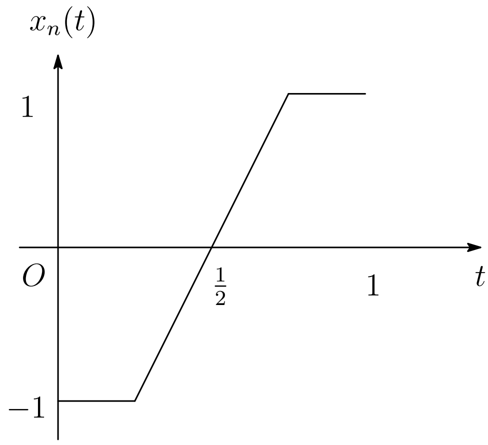
で定義する．

(1) d が三角不等式を満たすことを証明せよ．

(2) $(x_n)_n$ が，距離空間 (X,d) における Cauchy 列であることを証明せよ．

(3) 各 $t \in [0,1]$ に対して $\lim_{n\to\infty} x_n(t)$ は存在するが，$(x_n)_n$ は (X,d) における収束列ではないことを説明せよ．

(4) (X,d) は完備距離空間か．



(答) (1) $x, y, z \in X$ とする．任意の $t \in [0,1]$ に対し，$|x(t) - z(t)| = |x(t) - y(t) + y(t) - z(t)| \leq |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)|$ なので，$\int_0^1 |x(t) - z(t)| \mathrm{d}t \leq \int_0^1 |x(t) - y(t)| \mathrm{d}t + \int_0^1 |y(t) - z(t)| \mathrm{d}t$ が成り立つ．(2) $m, n \in \mathbb{N}$ $(m \geq n)$ に対し，以下の式が成り立つので Cauchy 列

である．(積分を実際に計算せずに図を書いてみて下さい)

$$
\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &= \int_0^1 |x_m(t) - y(t)| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |-1-(-1)| \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}} |-(-1)+n(t-\frac{1}{2})| \mathrm{d}t \\
&+ \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}} |-m(t-\frac{1}{2})+n(t-\frac{1}{2})| \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |m(t-\frac{1}{2})-n(t-\frac{1}{2})| \mathrm{d}t \\
&+ \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |1-n(t-\frac{1}{2})| \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1-1| \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \to 0 \quad (m, n \to \infty).
\end{aligned}
$$

(3) 収束先が連続関数ではないので，X に属していないから．(4) 収束しない Cauchy 列が存在するので完備でない．

問 6.2 距離空間において，点列コンパクトな集合は有界閉集合であることを証明せよ．

(答) 距離空間を (X, d) とし，K を点列コンパクトな集合とする．(閉であること) 収束列 $(x_n)_n \subseteq K$, $x_n \to x \in X$ をとる．K が点列コンパクトなので，収束する部分列 $x_{n_k} \to \hat{x} \in K$ が存在するが，もとの $(x_n)_n$ は収束列なので，$x = \hat{x} \in K$．(有界であること) 有界でないと仮定し，矛盾を導く．$a \in K$ を任意にとる．各 n に対し，$d(x_n, a) \geq n$ をみたす $x_n \in K$ が存在する．この $(x_n)_n$ の任意の部分列は有界でないから収束しない．つまり，$(x_n)_n$ は収束部分列をもたない．これは K の点列コンパクト性に矛盾．

問 6.3 $\mathbb{R}^N$ において，有界閉集合は点列コンパクトであることを証明せよ．

(答) K を有界閉集合とする．$\mathbb{R}^N$ における有界列は収束部分列をもつことを N に関する帰納法で証明する．$N = 1$ のときは，Bolzano-Weierstrass の定理なので成り立つ．$(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^N$ を有界列とする．$x_n = (x'_n, x''_n) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ と分解すると，$(x'_n)_n \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$ は有界列なので，帰納法の仮定から収束部分列 $x'_{n_k} \to \exists y' \in \mathbb{R}^{N-1}$ が存在する．次に，$(x''_{n_k})_k$ は $\mathbb{R}$ の有界列なので，収束部分列 $x''_{n_{k(l)}} \to \exists y'' \in \mathbb{R}$ が存在する．このとき，$x_{n_{k(l)}} \to (y', y'')$．したがって，$(x_n)_n \subseteq K$ のとき，収束部分列 $x_{n_{k(l)}} \to \exists y$ が存在し，K が閉であるので $y \in K$．

以上