基礎数理第 7 回 (2003-12-08)

問 7.1 距離空間において，可算コンパクト集合[1] は点列コンパクトであることを証明せよ．

(答) 対偶を示す．K が点列コンパクトでないとすると，収束部分列をもたない列 $(x_n)_n \subseteq K$ が存在する．このとき，各 n に対し，$U(x_n, \epsilon_n)$ が他の x_m を含まないような $\epsilon_n > 0$ が存在する．$F := \{x_1, x_2, \cdots\}$ は X の閉集合である．すると，$K = (X \setminus F) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} U(x_n, \epsilon_n)$ は開被覆である．このとき，どんな有限開被覆に対しても，その有限開被覆に含まれる番号 n の最大値を n_0 とすると，x_{n_0+1} は有限開被覆に含まれない．つまり，有限開被覆は存在しない．すなわち，K はコンパクトでない．

問 7.2 距離空間において，点列コンパクト集合は可算コンパクトであることを証明せよ．

(答) K を点列コンパクト集合とする．有限開被覆をもたない可算開被覆 $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ が存在すると仮定し，矛盾を導く．各 n に対し，$x_n \in K \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} U_i)$ が存在する．この点列 $(x_n)_n \subseteq K$ を考えると，点列コンパクト性より収束部分列 x_{n_k} が存在する．その極限を $a \in K$ とすると，$a \in U_m$ となるような m が存在する．また，$\exists k_0,\ \forall k \geq k_0,\ x_{n_k} \in U_m$．したがって，$n_k > m$ とすると，有限開被覆をもたないことに矛盾．

以上

[1]集合が可算コンパクトであるとは，その集合の任意の可算開被覆が有限開被覆を含むことをいう．