**基礎数理第 8 回 (2003-12-15)**

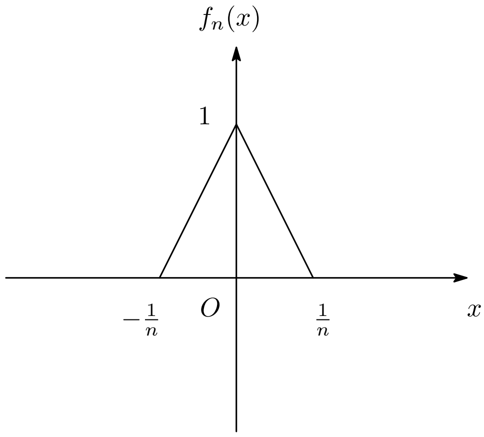
**問 8.1**

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & (|x| \le \frac{1}{n}) \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

とすると，各 $x \in \mathbb{R}$ に対し，$f_n(x) \to f(x)$ である．すなわち，

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(x, \epsilon),\ \forall n \ge n_0\ :\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

が成り立つ．ここで，$n_0$ が $x$ に依らないような $n_0(\epsilon)$ にとることができないこと，すなわち，$f_n \to f$ が一様収束でないことを示せ.




**(答)** $\epsilon < 1$ として，$n_0(x, \epsilon)$ を実際に計算する．$x = 0$ または $|x| \ge 1$ のとき，$n_0(x, \epsilon) \ge 1$ なる任意の整数でよい．$|x| < 1$ のとき，$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ より $n_0(x, \epsilon) \ge (1 - \epsilon)/|x|$ が必要である．もし一様に $n_0 = n_0(\epsilon)$ の形でとれるとすれば，$n_0(\epsilon) \ge \sup_{x \ne 0}(1 - \epsilon)/|x|$ が成り立たなければならないが，この右辺は $+\infty$ だからこれは不可能である.

**問 8.2** 「連続関数の一様収束極限は連続である」ことの証明が，上の問 8.1 の関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して適用できないことを説明せよ.

**(答)** $f_n$ の連続性と一様収束性から，任意の $a$ に対して，$|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| \le |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(x) - f(x)| + |f_n(a) - f(a)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$ のような評価ができる，というのが証明の概略であった．ここで，$|x - a| < \delta$ を満たす任意の $x$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$ が成り立つような $n$ を取れることがポイントである．問 8.1 の関数列 $(f_n)$ に対して $a = 0$ とすると，一様収束でないことから，このような $n$ がとれないので，証明が破綻する.

以上