基礎数理第 10 回 (2003-12-24)

問 10.1 $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とする.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $S^\top AS$ の固有値を求めよ.

(答) (1) $\det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. (2) $S^\top AS = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$ なので, $\det(\lambda I - S^\top AS) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 14\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 7 \pm 3\sqrt{5}$. したがって, 固有値は合同変換[1]に対し不変でない.

問 10.2 ベクトルの集合 $\{a_1, \ldots, a_k\}$, $\{b_1, \ldots, b_l\}$ $(k < l)$ が線形独立であるとき, $\{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{b_j\}$ が線形独立となるような j が存在することを示せ.

(答) そのような j が存在しないと仮定して矛盾を導く. 背理法の仮定より, 任意の j に対して, $\{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{b_j\}$ は線形従属となる. よって, 任意の j に対して, 適当なスカラー $c_{1j}, \ldots, c_{kj}$ が存在し, $b_j = \sum_{i=1}^k c_{ij} a_i$ と表すことができる. $\{b_1, \ldots, b_l\}$ の線形独立性より, $\sum_{j=1}^l s_j b_j = 0 \Leftrightarrow s = 0$ が成り立つ. また, $\{a_1, \ldots, a_k\}$ の線形独立性, および, $\sum_{j=1}^l s_j b_j = \sum_{j=1}^l s_j \sum_{i=1}^k c_{ij} a_i = \sum_{i=1}^k (\sum_{j=1}^l c_{ij} s_j) a_i$ より, $\sum_{j=1}^l s_j b_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^l c_{ij} s_j = 0$ が成り立つ. したがって, $Cs = 0 \Leftrightarrow s = 0$ を得る. このとき, C は $k \times l$ 行列であり, $k < l$ であるから矛盾.

問 10.3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の階数を, 以下の 3 種類の定義にしたがって, それぞれ計算せよ.

(1) 線形独立な列ベクトルの最大の本数.

(2) 線形独立な行ベクトルの最大の本数.

(3) 0 でない小行列式の最大サイズ.

(答) (1) A の各列ベクトルを a_1, a_2, a_3, a_4 とおく. 原理的には $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ の部分集合を全部しらべて線形独立性をチェックすればよい. やってみると, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_1, a_4\}$, $\{a_3, a_4\}$ が大きさ最大の線形独立集合である. したがって, 階数は 2 である. より一般的には, 線形独立な列ベクトルの集合 B を以下のように構成する. すなわち, $B = \emptyset$ から出発し, B が再び線形独立となるように, 列ベクトルを一本ずつ追加していく. すると, $B \leftarrow B \cup \{a_1\} = \{a_1\}$, $B \leftarrow B \cup \{a_3\} = \{a_1, a_3\}$ となり, この時点でアルゴリズムは終了する. なぜなら, a_4 は a_1 と a_3 の線形結合で表されるからである. このようにして求まった B が実は大きさ最大の線形独立集合であることが問 10.2 の命題を用いて示すことができる. したがって, $|B| = 2$ が求める階数である. (2) A の各行ベクトルを b_1, b_2, b_3 とおく. 原理的には $\{b_1, b_2, b_3\}$ の部分集合を全部しらべて線形独立性をチェックすればよい. やってみると, $\{b_1, b_2\}$, $\{b_1, b_3\}$, $\{b_2, b_3\}$ が大きさ最大の線形独立集合である. したがって, 階数は 2 である. 一般的なアルゴリズムについても, 行ベクトル b_1, b_2, b_3 に対して適応すれば同様の議論ができる.

[1] ある正則行列 S による変換 $S^\top AS$ を合同変換という.

(3) 行と列の添字集合をそれぞれ $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$ とおく．$I \subseteq M, J \subseteq N, |I| = |J|$ なる部分集合に対応する小行列式を $\det A[I, J]$ と表すことにする．階数が 3 以下であることは明らか．$\det A[M, J \setminus \{2\}] = 0$ より，階数が 2 以下であることも分かる．$\det A[\{2, 3\}, \{3, 4\}] = -1 \neq 0$ より，求める階数は 2.

以上