基礎数理第 11 回 (2004-01-08)

問 11.1 n 次三重対角行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

の行列式の値を d_n とする．

(1) d_n の満たす 3 項漸化式を導出せよ．

(2) d_n を求めよ．

(答) (1) 行列 A の第 i 行に関する Laplace 展開 $|A| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}A_{ik}\Delta_{ik}$ を用いる．特に，第 1 行に対して Laplace 展開を行うと，$d_n = |A| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}A_{1k}\Delta_{1k} = (-1)^{1+1}A_{11}\Delta_{11} + (-1)^{1+2}A_{12}\Delta_{12} = 2\Delta_{11} + \Delta_{12}$ を得る．このとき，$\Delta_{11} = d_{n-1}$, $\Delta_{12} = -d_{n-2}$ となるので，$d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2}$ が求める漸化式である．(2) $d_n = 2d_{n-1} - d_{n-1} \Leftrightarrow d_n - d_{n-1} = d_{n-1} - d_{n-2}$ なので，$d_n - d_{n-1} = d_2 - d_1 = 1$ である．したがって，$d_n = n + 1$.

問 11.2 A, B を正方行列とするとき，$AB = I$ ならば $BA = I$ が成り立つことを示せ．

(答) Cramer の公式と $|A| = |A^\top|$ を用いて証明する．$BA = I \Leftrightarrow A^\top B^\top = I$ であるから，$AB = I \Rightarrow A^\top B^\top = I$ を示せばよい．$b_1, \ldots, b_n$ を B の各列ベクトル，$e_1, \ldots, e_n$ を単位ベクトルとすると，$AB = I$ は $Ab_j = e_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ と表すことができる．各 j に対して Cramer の公式を適用すると，$B_{ij} = \frac{\tilde{A}_{ji}}{|A|}$ を得る．ただし，$\tilde{A}_{ji}$ は A の余因子である．これは，A の第 i 列を e_j でおきかえた行列に対し，Laplace 展開を行えば分かる．ここまでをまとめると，$AB = I \Leftrightarrow B_{ij} = \frac{\tilde{A}_{ji}}{|A|}$ が成り立つ．同様に，$A^\top B^\top = I \Leftrightarrow B^\top_{ij} = \frac{\tilde{A^\top}_{ji}}{|A^\top|} \Leftrightarrow B_{ij} = \frac{\tilde{A^\top}_{ij}}{|A^\top|}$ が成り立つ．ここで，$|A| = |A^\top|$，および $\tilde{A^\top}_{ij} = \tilde{A}_{ji}$ より，$AB = I \Leftrightarrow A^\top B^\top = I$ が成り立つ．

以上