## 基礎数理第 13 回 (2004-01-26)

**問 13.1** $m \times m$ 行列

$$J(\lambda, m) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

の固有値を求めよ．また，その固有値の代数的重複度と幾何学的重複度を求めよ．

**(答)** 特性多項式を計算すると，$\det(xI - J(\lambda, m)) = (x-\lambda)^m$ なので，$J(\lambda, m)$ の固有値は $\lambda$ である．また，固有値 $\lambda$ の代数的重複度は $m$ である．一方，$\dim(\ker(J(\lambda, m) - \lambda I)) = m - \mathrm{rank}(J(\lambda, m) - \lambda I) = m - (m-1) = 1$ なので，固有値 $\lambda$ の幾何学的重複度は 1 である．

**問 13.2**

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

のとき，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax$ の解の形を調べよ．

**(答)** $x_3(t) = x_3(0)\mathrm{e}^{\lambda t}$, $x_2(t) = (x_3(0)t + x_2(0))\mathrm{e}^{\lambda t}$, $x_1(t) = (\frac{x_3(0)}{2}t^2 + x_2(0)t + x_1(0))\mathrm{e}^{\lambda t}$ のように，$t$ の多項式と指数関数の積になる．

**問 13.3**

$$\min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \neq 0 \iff A \text{ の列ベクトルが線形独立},$$

を示せ．

**(答)** 任意の $x(\neq 0)$ に対し，$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \neq 0 \Leftrightarrow \|Ax\| \neq 0 \Leftrightarrow Ax \neq 0$ であるから，$\min_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \neq 0$ は，$Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ と同値である．このとき，$A$ の各列ベクトルを $A_i$ とおくと，$\sum_i x_i A_i = 0 \Leftrightarrow x = 0$ となり，これは $A$ の列ベクトルが線形独立であることに他ならない．

**問 13.4** $\mathrm{rank}(A^\top A) = \mathrm{rank}(A)$ を示せ．

**(答)** $m \times n$ 行列 $A$ の階数を $r$ とすると，適当な正則行列 $U$ が存在し，$AU^{-1} = \begin{bmatrix} B & O \end{bmatrix}$ となる．ただし，$B$ は列ベクトルが一次独立な $m \times r$ 行列である．このとき，$A^\top A =$

$U^\top \begin{bmatrix} B^\top B & O \\ O & O \end{bmatrix} U$ なので，$r \times r$ 行列 $B^\top B$ が正則であることを示せばよい．$B^\top B$ が正則であることは，$B^\top Bx = 0 \Leftrightarrow x = 0$ と同値である．$B$ の列ベクトルは独立であるから $Bx = 0 \Rightarrow x = 0$ が成り立つ．すると，$B^\top Bx = 0 \Rightarrow x^\top B^\top Bx = 0 \Rightarrow \|Bx\| = 0 \Rightarrow Bx = 0$ であるから，$B^\top Bx = 0 \Rightarrow x = 0$ が成り立つ．逆に，$x = 0 \Rightarrow B^\top Bx = 0$ は明らか.

**(別解)** $m \times n$ 行列 $A$ の階数を $r$ とすると，適当な直交行列 $U, V$ が存在し，

$$A = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} V^\top \quad (\sigma_1, \ldots, \sigma_r > 0)$$

のように特異値分解することができる．このとき，

$$A^\top A = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r^2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} V^\top$$

となるので，$A^\top A$ の階数は $r$ である.

以上