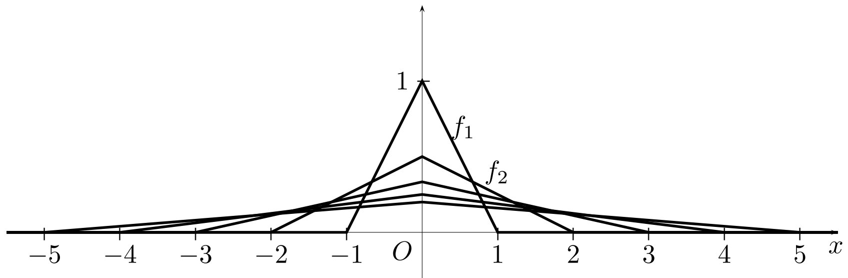
2002 **年度冬学期・基礎数理**

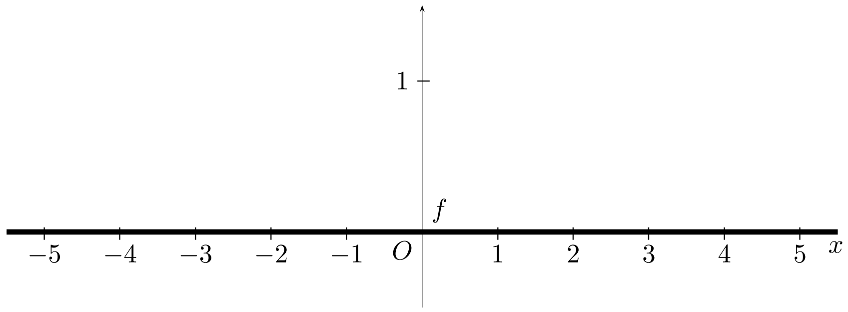
優収束定理を理解するための有用な <u>例</u> についての確認

黒木 裕介

2002 **年** 12 **月** 26 **日**

<u>例</u>　$\mathbb{R}$ を定義域として，次のような（コンパクト）一様収束する関数 f_n を考える．（$f_n \to f \quad ; n \to \infty$）





$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = 1 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 0 \end{cases}$$

> 各 x に対して $\displaystyle\max_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ を計算することにより，可積分な優関数 φ が存在しないことを厳密に言う．

$x = 0$ に関して対称なので，$x \geqslant 0$ についてのみ考えればよい．すると，f_n という関数は，

$$f_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{x}{n}\right) & 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & x \geqslant n \end{cases}$$

と立式できる．

上図を見れば明らかなように，

0 から f_1 と f_2 の交点までは f_1 が最大を与え，
f_1 と f_2 の交点から f_2 と f_3 の交点までは f_2 が最大を与え，

$\cdots\cdots$

と続くので，隣り合う関数同士の交点の x 座標を求める．f_n と f_{n+1} の交点は，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)&=\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{x}{n+1}\right)\\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}&=x\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ x&=\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2\,(n+1)^2}{(n+1)^2-n^2}\\ &=\frac{n(n+1)}{2n+1}\end{aligned}$$

これに，$n=0$ を代入すると，$x=0$ となることに注意しておく．（f_1 が最大になる範囲も，この式 1 本で示せる．）

優関数 $\varphi(x)$ として，最小のものは，$\max\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ にぴったり沿うものなので，いま

$$\varphi(x) := \max_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

と定義する．次に，この優関数の正実数部分における広義積分を求める．（実はこの広義積分が $+\infty$ に発散することを述べたい．）

$$\int_{x\geqslant 0}\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)k}{2(k-1)+1}}^{\frac{k(k+1)}{2k+1}}\frac{1}{k}\left(1-\frac{x}{k}\right)\mathrm{d}x$$

右辺の lim の中身を取り出して計算すると，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)k}{2k-1}}^{\frac{k(k+1)}{2k+1}}\left(\frac{1}{k}-\frac{x}{k^2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\sum\left[\frac{x}{k}-\frac{x^2}{2k^2}\right]_{\frac{(k-1)k}{2k-1}}^{\frac{k(k+1)}{2k+1}}=\frac{1}{2}\sum\left\{\frac{3k^2+4k+1}{(2k+1)^2}-\frac{3k^2-4k+1}{(2k-1)^2}\right\}=\frac{1}{2}\sum\frac{8k^3}{(2k+1)^2\,(2k-1)^2}\\ &>\frac{1}{2}\sum\frac{8k^3}{(2k+1)^2\,(2k)^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(2k+1)^2}\\ &>\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(4k)^2}\qquad\because (2k+1)<4k\quad;k\geqslant 1\\ &=\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &>\frac{1}{16}\int_{1}^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{16}\ln(n+1)\end{aligned}$$

ここで，lim を取ると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{16}\ln(n+1)=+\infty$$

なので，

$$\therefore \int_{x\geqslant 0}\varphi(x)\mathrm{d}x>+\infty$$

となる．したがって，いくら f_n にべったりくっつくような最小の優関数を選んでも優関数の広義積分が収束しない．可積分な優関数は存在しないので，以下ように 2 つの積分が等しくなくても

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x$$

優収束定理に矛盾しないことが確認できた．