基礎数理 （平成 14 年度冬学期）室田

優収束定理に関する例　(可積分な優関数の存在が必要であることを示す例)

優収束定理は，(i) コンパクト一様収束, (ii) 可積分な優関数の存在，という 2 つの仮定の下で積分の収束性を述べている．ここでは，(i) は満たすが (ii) を満たさない状況では積分の収束性が保証されないことを示す例を挙げる．

$n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}(1 - \frac{|x|}{n}) & (|x| \leq n) \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \qquad f(x) = 0 \quad (\forall x \in \mathbf{R})$$

と定義する．このとき，次のことが成り立つ．

1. f_n は f に $\mathbf{R}$ 上で一様収束する．
2. $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f_n(x) \mathrm{d}x = 1$　なので，これは $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x) \mathrm{d}x = 0$ に収束しない．
3. 可積分な優関数 φ は存在しない．

以下，可積分な優関数が存在しないことを証明する．もし，優関数 φ が存在したとすると，

$$\varphi(x) \geq \sup\{f_n(x) \mid n = 1, 2, 3, \ldots\} \qquad (\forall x \in \mathbf{R})$$

が成り立つ．1 以上の任意の x に対して，$n/3 \leq x \leq n/2$ を満たす 自然数 n が存在して，

$$\varphi(x) \geq \frac{1}{n}(1 - \frac{x}{n}) \geq \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{6x}$$

である．したがって，

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(x) \mathrm{d}x \geq \frac{1}{6} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = +\infty.$$

これは φ が可積分でないことを示している．　　　以上