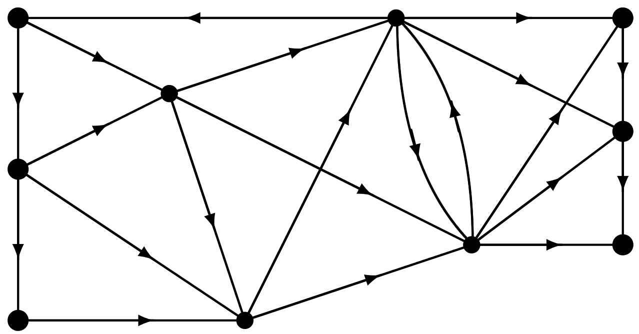
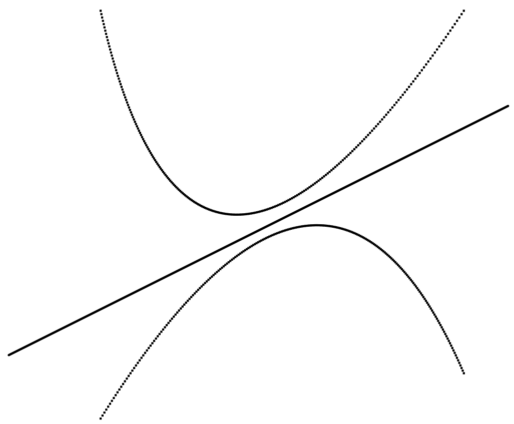
離散最適化を見る数理の眼

—「離散凸解析」への 超 誘い —

室田 一雄

東京大学 数理情報学専攻





３部構成

１　離散最適化

２　数理の眼

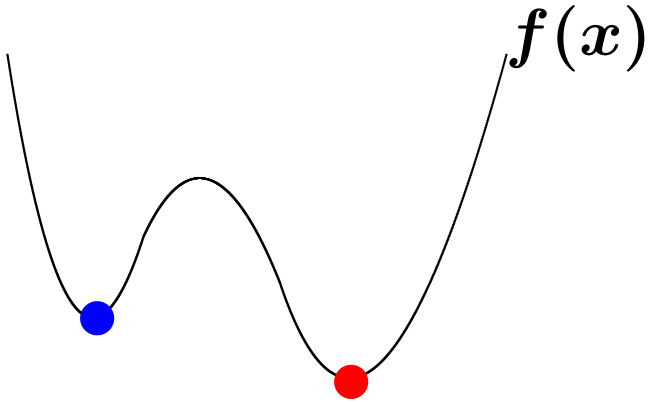
３　離散凸解析

を見る

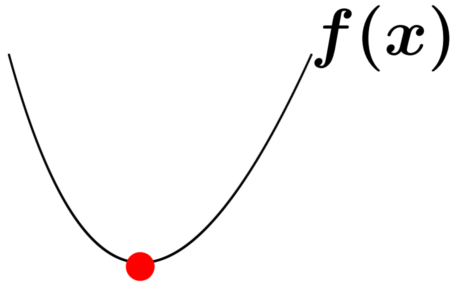
：

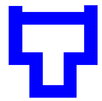
への超誘い

最適化



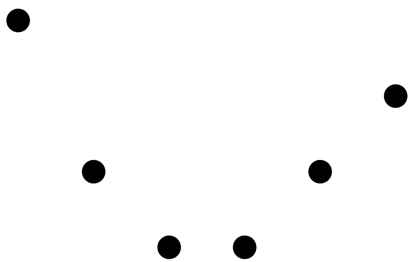
解き易い問題





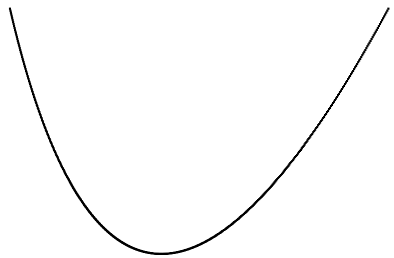
凸関数

離散

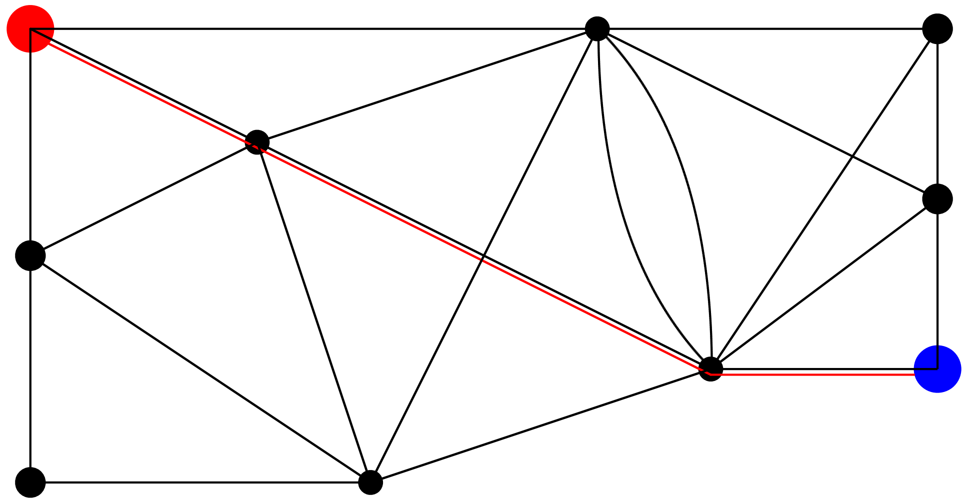


$\Longleftrightarrow$

連続

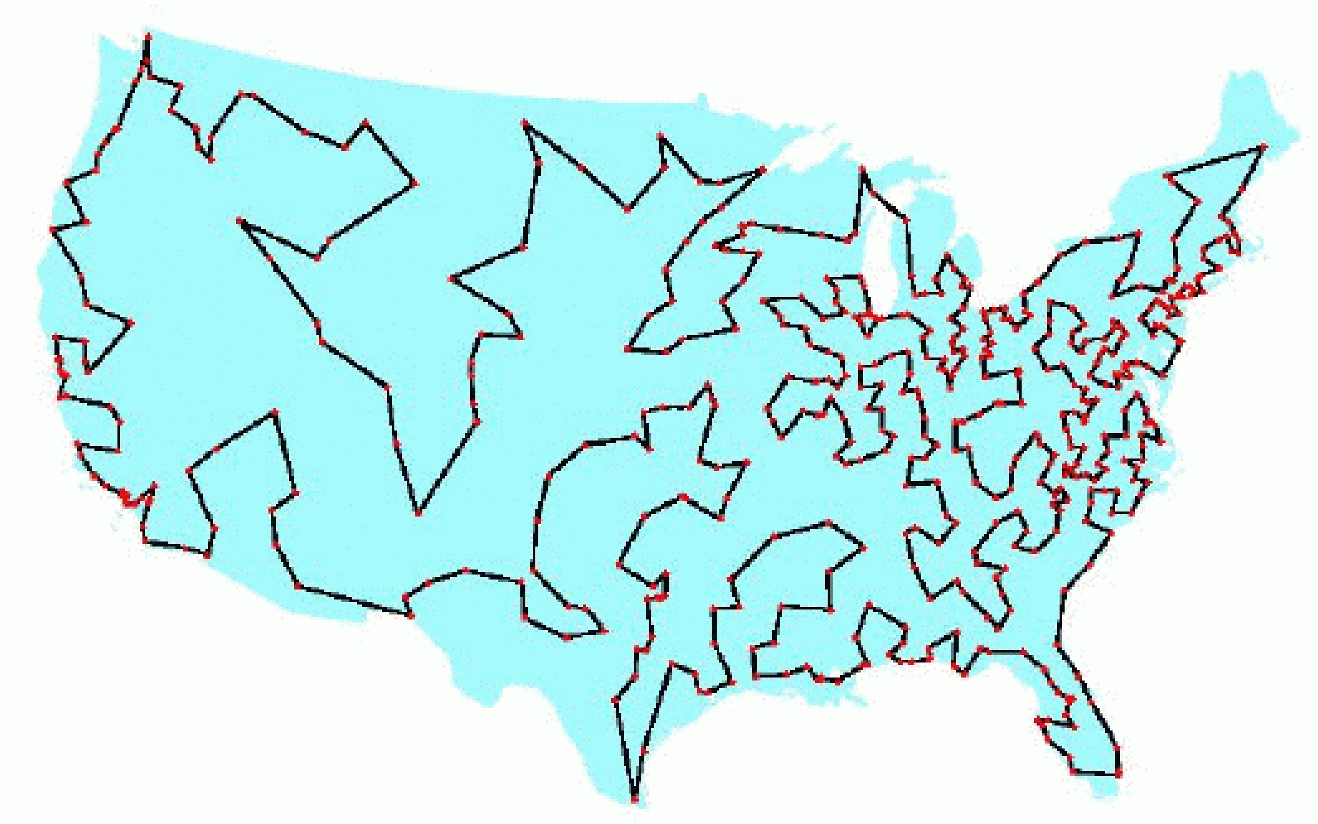


離散最適化



最短路問題	巡回セールスマン問題
簡単に解ける	なかなか解けない

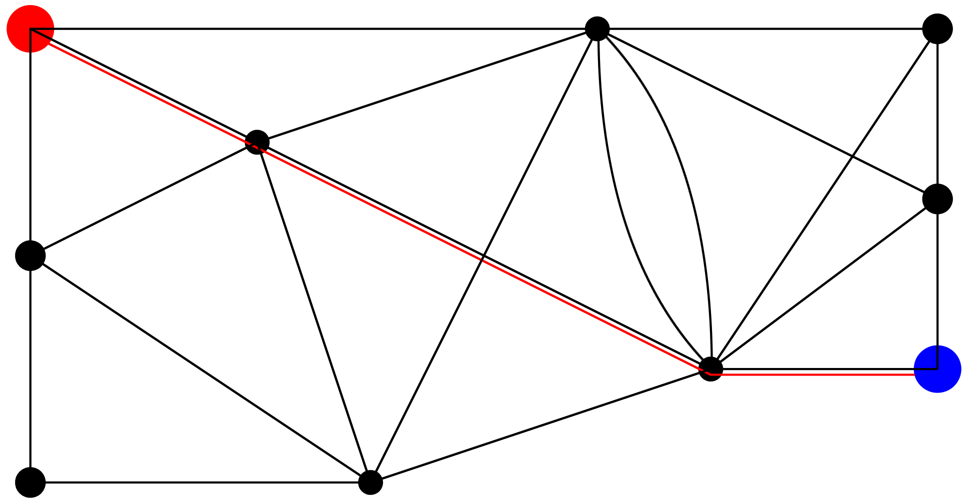
巡回セールスマン問題



532 cities, M. Padberg–G. Rinaldi (1987)

$\Longrightarrow$ **デモ（土村展之 氏 作成）**

離散最適化



最短路問題	巡回セールスマン問題
簡単に解ける	なかなか解けない

１　離散最適化

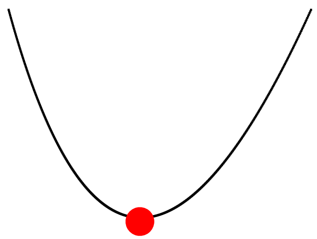
２　数理の眼

３　離散凸解析

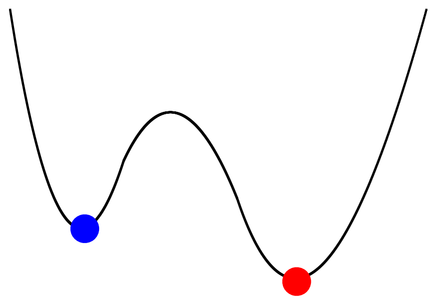
数理の眼

最短路問題	巡回セールスマン問題
容易に解ける	本質的に困難
多項式時間	ＮＰ困難

「凸」だから



「凸」でないから



工学：　物　　　　をつくる

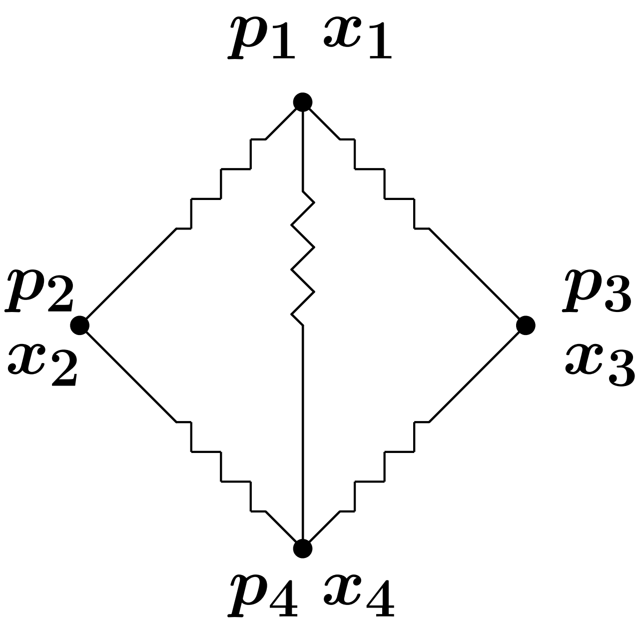
数理工学：　物の見方をつくる

論理，アルゴリズム，ソフトウェア

離散構造　＋　凸関数

最短路問題は離散凸だから解き易い

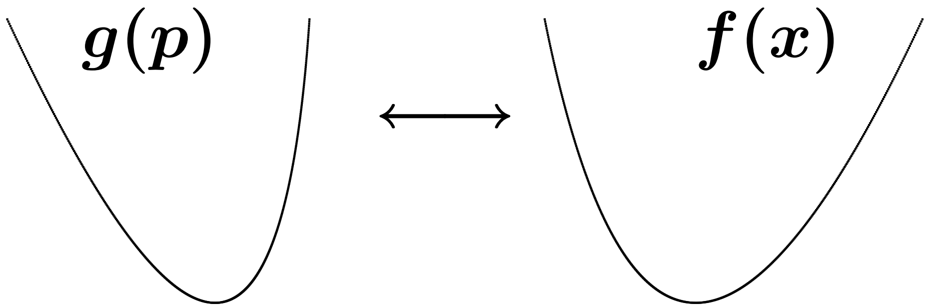
非線形抵抗回路



離散構造 ＋ 凸関数
電気回路 ＋ エネルギー

電圧源 p: 節点電位，$g(p)$: 消費電力

電流源 x: 流入電流，$f(x)$: 消費電力



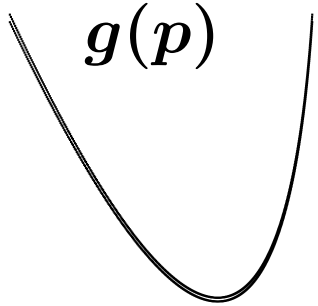
- $g(p)$ と $f(x)$ は ともに 凸関数
- $g(p)$ と $f(x)$ は 裏 表 —— ルジャンドル変換

$\Longrightarrow$ 電圧源 と 電流源 の違いは？

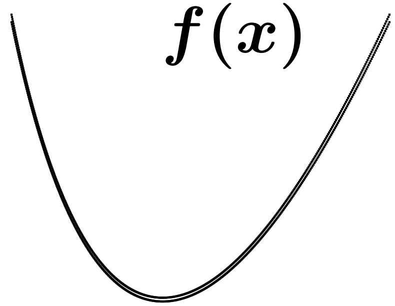
電圧 と 電流 の区別

離散構造 ＋ 凸関数

電圧源 $p \Longrightarrow$ **電力** $g(p)$　　**電流源** $x \Longrightarrow$ **電力** $f(x)$



$\longleftrightarrow$



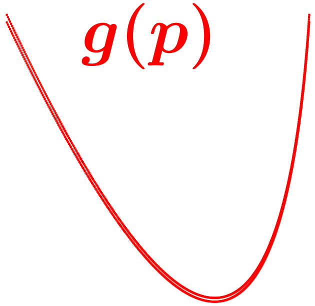
凸関数　　**凸関数**

$\Longrightarrow$ **離散構造に着目すると…**

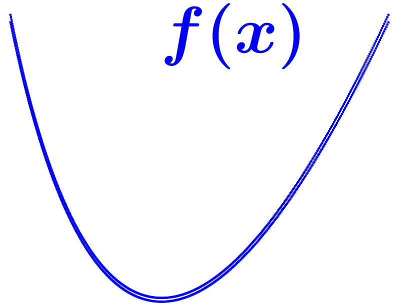
電圧 と 電流 の区別

離散構造 ＋ 凸関数

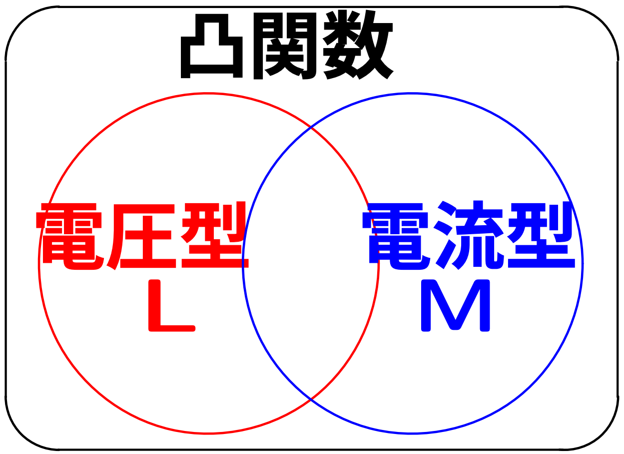
電圧源 $p \Longrightarrow$ 電力 $g(p)$ 　　 電流源 $x \Longrightarrow$ 電力 $f(x)$



$\longleftrightarrow$



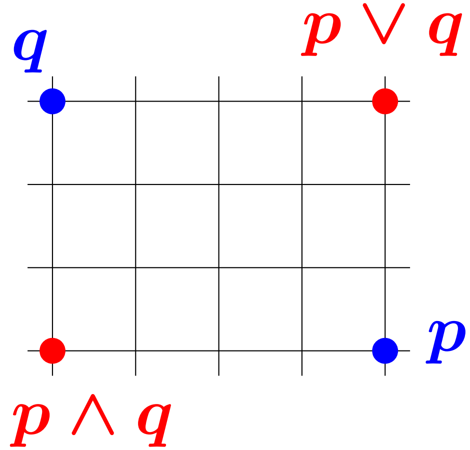
L凸関数 　　 **M凸関数**



L(電圧型)とM(電流型)

p, q　２パターンの電圧源

$p \vee q$, $p \wedge q$　成分毎の最大，最小

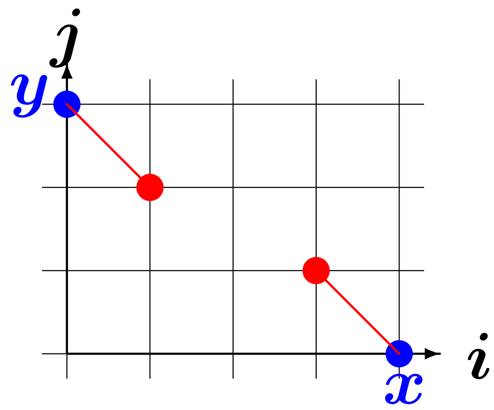


[劣モジュラ性]

$$g(p) + g(q) \geq g(p \vee q) + g(p \wedge q)$$

---

x, y　２パターンの電流源



[交換性]　$\forall x, y$,　$\forall i : x_i > y_i$,

$\exists j : x_j < y_j$, $\exists \alpha > 0$:

$$f(x) + f(y) \geq f(x - \alpha(e_i - e_j)) + f(y + \alpha(e_i - e_j))$$

e_i:　第i単位ベクトル

1　離散最適化

2　数理の眼

3　離散凸解析

離散凸解析　概観

L 凸関数 $\longleftrightarrow$ M 凸関数

理論的
- 局所最適 $\Longleftrightarrow$ 大域最適

完備性
- 共役性：ルジャンドル 変換
- 双対定理（離散分離，フェンシェル双対）
- 最小化アルゴリズム

分野的
- ネットワークフロー（電気回路）

横断性
- ＯＲ（待ち行列，資源配分）
- 多項式行列
- 効用関数，ゲーム理論

離散凸解析の歴史

1935 マトロイド Whitney

1965 劣モジュラ関数 Edmonds

1975 マトロイドの応用 伊理，冨澤，Recski

1983 劣モジュラ関数 と 凸性

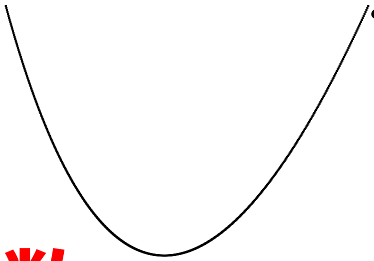
Lovász，Frank，藤重

1996 離散凸解析 の提唱 室田

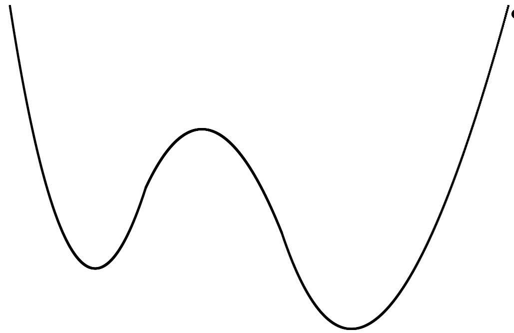
2000 劣モジュラ関数 最小化アルゴリズム

岩田，藤重，Fleischer，Schrijver

凸 関 数 (連続変数)



凸関数



凸でない関数

$f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ が **凸関数**

$$\Longleftrightarrow \ \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

$$(0 < \forall \ \lambda < 1)$$

最適化 における 凸関数 の意義

線形計画法（LP）

- 局所的最適＝大域的最適

$\Longrightarrow$ 降下アルゴリズム

- 双対性

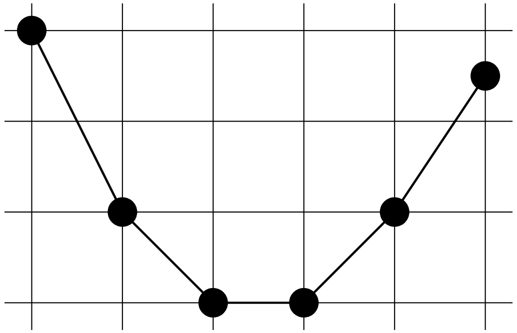
$\Longrightarrow$ 主双対アルゴリズム，感度解析

- 現実問題は 凸とは限らない
- 「凸」は最適化を理解する軸
- 線形／非線形 ではなく 凸／非凸

離散最適化 における「凸構造」とは？

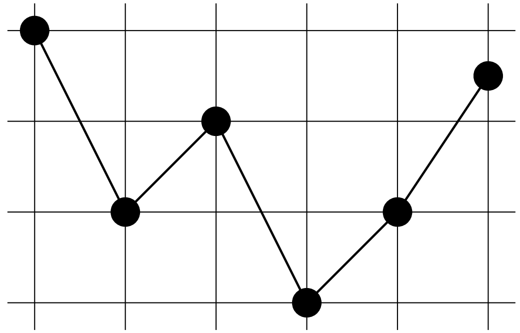
$f(x)$

凸



$f(x)$

非 凸



凸構造＝解ける問題 ◦ **局所/大域最適性** ◦ **双対性**

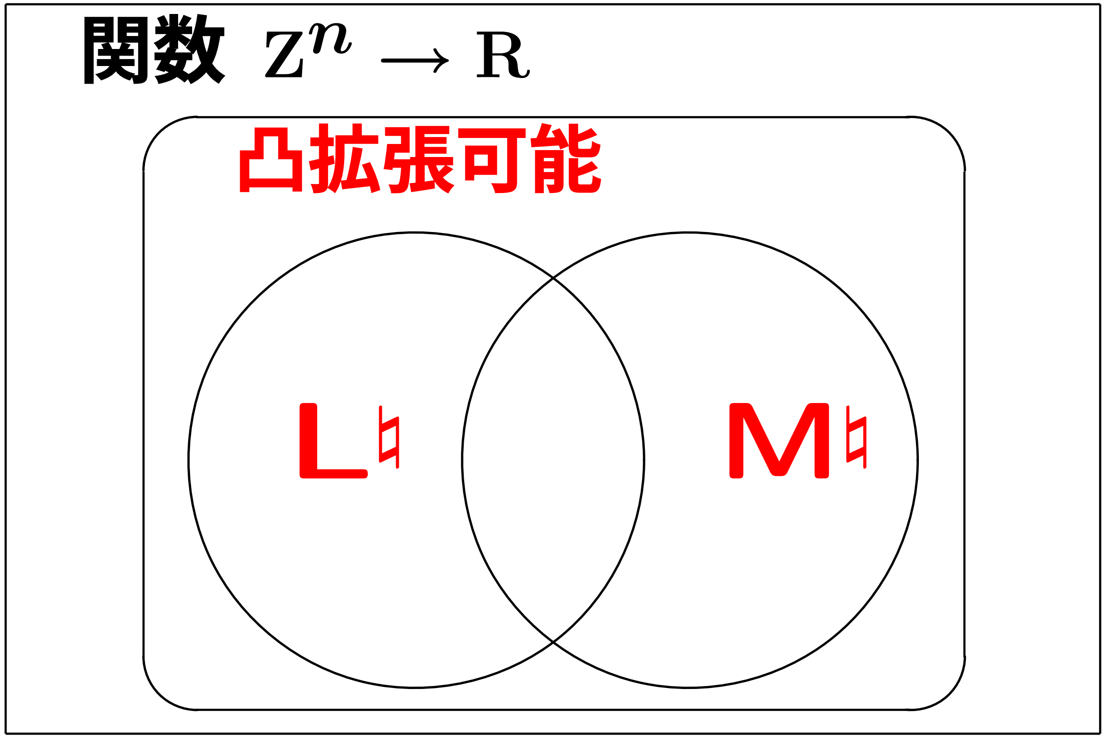
現実問題は困難

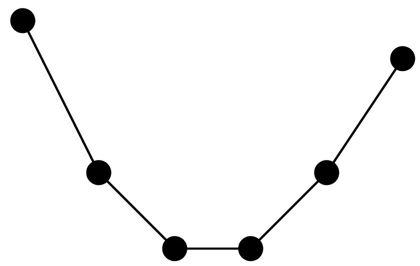
● **実際的手法(top down) メタヒューリスティックス**

● **基礎的道具(bottom up) 離散凸解析**

離散凸関数のクラス

$$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R}$$





f が凸拡張可能

$\exists$ 凸関数 $\overline{f}$: $f(x) = \overline{f}(x)$

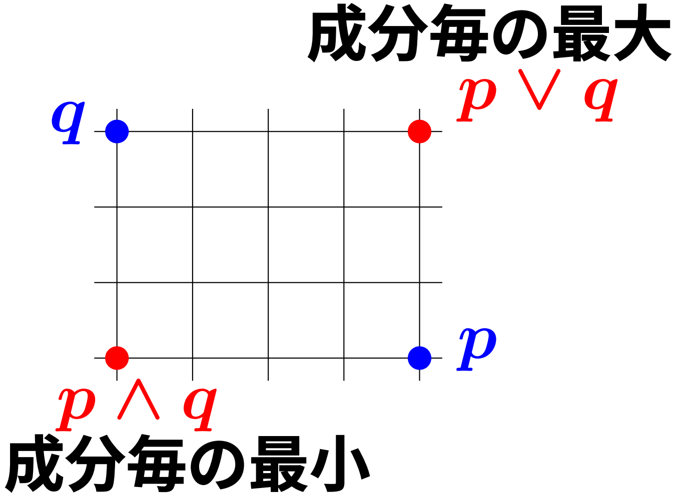
凸拡張可能性だけでは上手くない

$\Longrightarrow$ **離散数学の成果を利用**

劣モジュラ関数

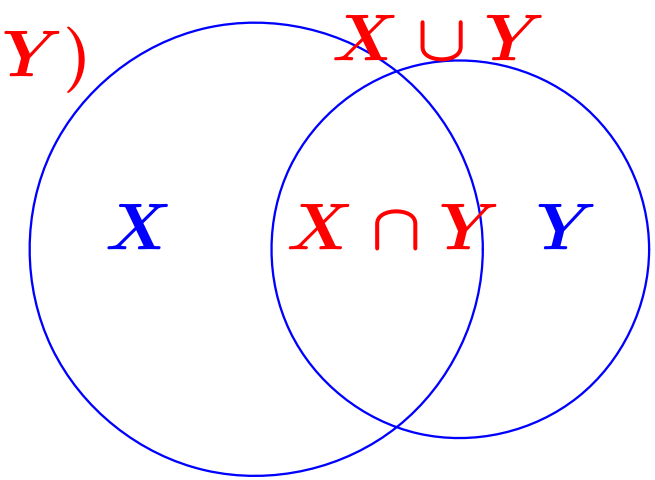
$g : \mathrm{Z}^n \to \mathrm{R}$ **が劣モジュラ:**

$$g(p) + g(q) \geq g(p \vee q) + g(p \wedge q)$$



集合関数 ρ が劣モジュラ:

$$\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$$



劣モジュラ関数 と 凸関数(1980年代)

$$\rho(X)+\rho(Y)\geq\rho(X\cup Y)+\rho(X\cap Y)$$

- 最小化/最大化アルゴリズム

  最小化 $\Rightarrow$ 多項式時間，　最大化 $\Rightarrow$ NP困難

- 凸拡張　（Lovász）

  集合関数が劣モジュラ $\Longleftrightarrow$ Lovász拡張が凸関数

- 双対定理　（Edmonds，Frank，藤重）

劣モジュラ関数 の 双対性
＝ 凸性 ＋ 離散性

２０代 の
「理 感」

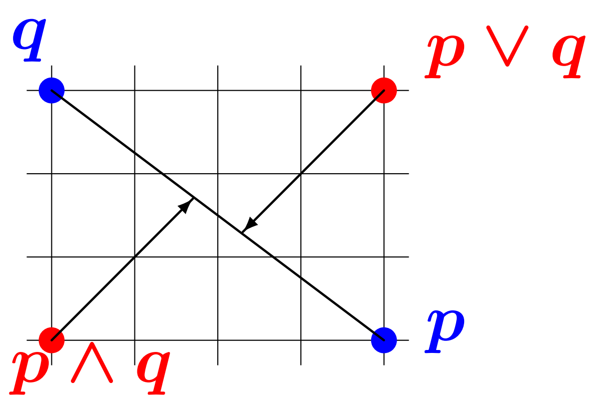
伊原康隆:
志学 数学

L 凸 関 数 の 定 義

$g : \mathrm{Z}^n \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$

$p \vee q$　**成分毎の最大値**

$p \wedge q$　**成分毎の最小値**



g **がL凸関数** $\Longleftrightarrow$

[劣モジュラ]　$g(p) + g(q) \geq g(p \vee q) + g(p \wedge q)$

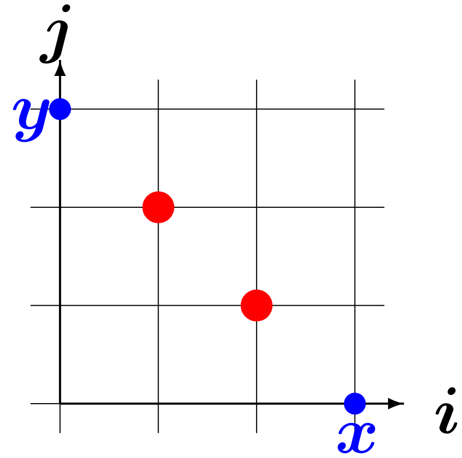
[並進不変]　$\exists r, \ \forall p$:　$g(p+1) = g(p) + r$

L ＝ Lattice (束)

M 凸 関 数 の 定 義

$$f : \mathrm{Z}^n \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$$

e_i: 第i単位ベクトル



f がM凸関数 $\Longleftrightarrow$ (M-EXC):

$\forall x, y$, $\forall i : x_i > y_i$, $\exists j : x_j < y_j$:

$$f(x) + f(y) \geq f(x - e_i + e_j) + f(y + e_i - e_j)$$

M ＝ Matroid (マトロイド)

離 散 凸 解 析　概 観

Ｌ 凸 関 数 $\longleftrightarrow$ Ｍ 凸 関 数

理論的　● 局所最適 $\Longleftrightarrow$ 大域最適

完備性　● 共役性：ルジャンドル 変換

● 双対定理（離散分離，フェンシェル双対）

● 最小化アルゴリズム

分野的　● ネットワークフロー（電気回路）

横断性　● ＯＲ（待ち行列，資源配分）

● 多項式行列

● 効用関数，ゲーム理論

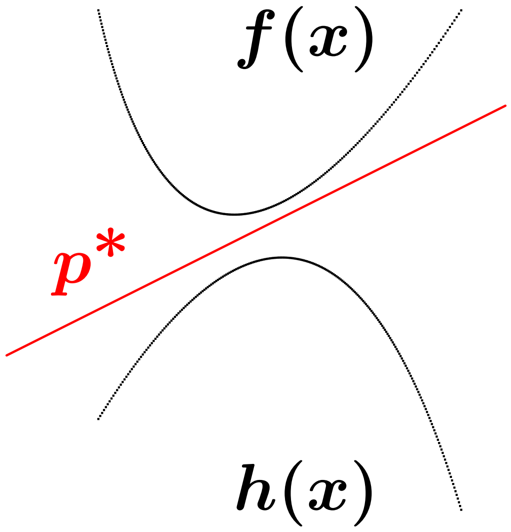
最後に：

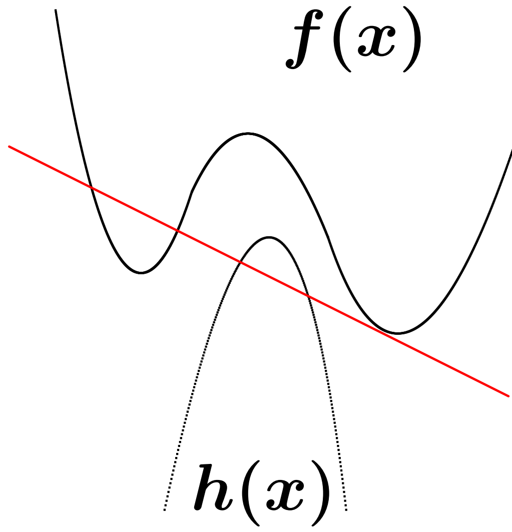
数学の好きな人のために

双　対　定　理

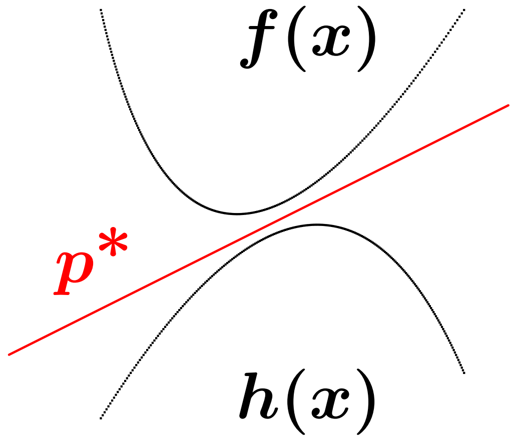
のことを……

双対性：分離定理





分離定理:



$f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ 　　**凸関数**

$h : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ 　　**凹関数**

$$f(x) \geq h(x) \quad (\forall x) \ \Rightarrow \ \exists \ \alpha^* \in \mathrm{R}, \quad \exists \ p^* \in \mathrm{R}^n:$$

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x \rangle \geq h(x) \qquad (x \in \mathrm{R}^n)$$

離散分離定理:

$f : \mathrm{Z}^n \to \mathrm{Z}$ 　　**“凸関数”**

$h : \mathrm{Z}^n \to \mathrm{Z}$ 　　**“凹関数”**

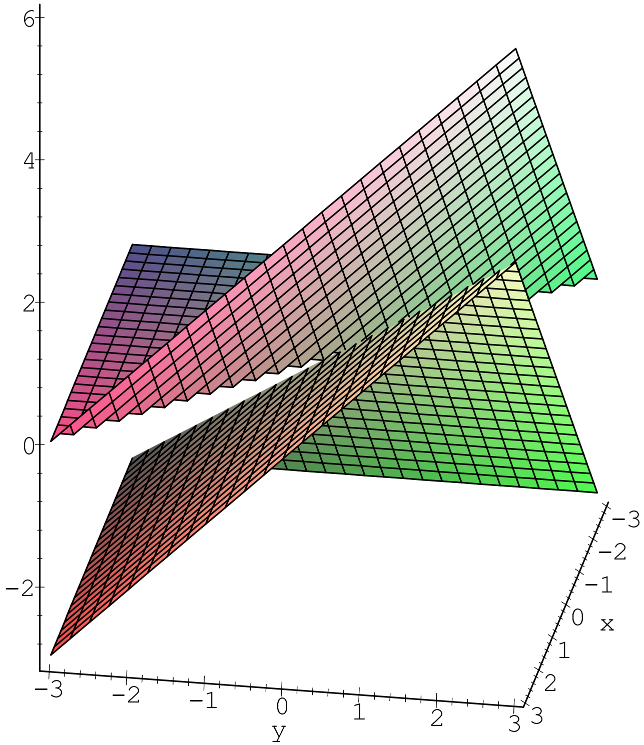
$$f(x) \geq h(x) \quad (\forall x) \ \Rightarrow \ \exists \ \alpha^* \in \mathrm{Z}, \quad \exists \ p^* \in \mathrm{Z}^n:$$

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x \rangle \geq h(x) \qquad (x \in \mathrm{Z}^n)$$

離散分離の難しさ（1）

$$f(x,y) = \max(0, x+y)$$ 凸関数

$$h(x,y) = \min(x,y)$$ 凹関数



分離可能だが
整数分離不能

$p^* = (1/2, 1/2)$，$\alpha^* = 0$ 唯一の分離平面

離散分離の難しさ（2）

実数分離さえ不可能な例

$$f(x,y) = |x+y-1| \qquad \text{凸関数}$$

$$h(x,y) = 1 - |x-y| \qquad \text{凹関数}$$

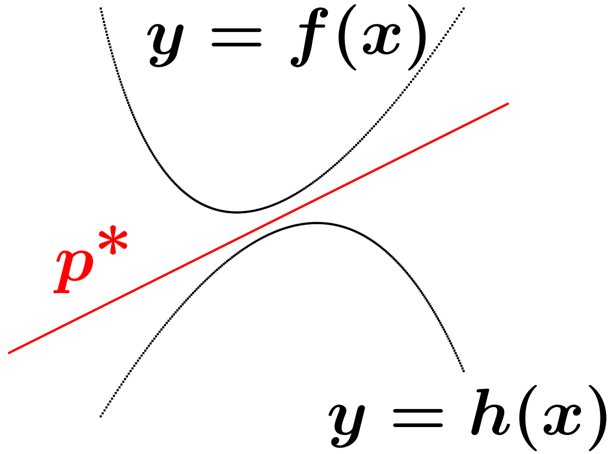
- $f(x,y) \geq h(x,y) \quad (\forall (x,y) \in \mathbf{Z}^2)$ は成立
- $f(x,y) \geq h(x,y) \quad (\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2)$ は不成立

$(x,y) = (1/2, 1/2)$ で $f = 0 < h = 1$

$\Longrightarrow \quad f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x \rangle \geq h(x)$ を満たす

$\alpha^* \in \mathrm{R}$，$p^* \in \mathrm{R}^2$ は存在しない

Ｌ分離定理／Ｍ分離定理



$f : \mathrm{Z}^n \to \mathrm{R}$　　“凸関数”

$h : \mathrm{Z}^n \to \mathrm{R}$　　“凹関数”

（１） $f(x) \geq h(x) \quad (\forall x) \Rightarrow \ \exists\ \alpha^* \in \mathrm{R},\ \ \exists\ p^* \in \mathrm{R}^n$:

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x \rangle \geq h(x) \qquad (x \in \mathrm{Z}^n)$$

（２） f，hが整数値のとき，$\alpha^* \in \mathrm{Z}$，$p^* \in \mathrm{Z}^n$ にとれる

Ｌ分離定理　　Ｌ凸関数に対し 離散分離が成立

$\Longrightarrow$ **劣モジュラ集合関数の分離定理**

Ｍ分離定理　　Ｍ凸関数に対し 離散分離が成立

$\Longrightarrow$ **マトロイド交差問題の重み分離定理**

最大・最小定理

Legendre変換 $f^\bullet(p) = \sup\{\langle p, x\rangle - f(x) \mid x \in \mathbf{Z}^n\}$

$$h^\circ(p) = \inf\{\langle p, x\rangle - h(x) \mid x \in \mathbf{Z}^n\}$$

Fenchel型 双対定理

f: M凸　　h: M凹　　$(\mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z})$

$$\inf_{x\in\mathbf{Z}^n}\{f(x) - h(x)\} = \sup_{p\in\mathbf{Z}^n}\{h^\circ(p) - f^\bullet(p)\}$$

$\Uparrow$

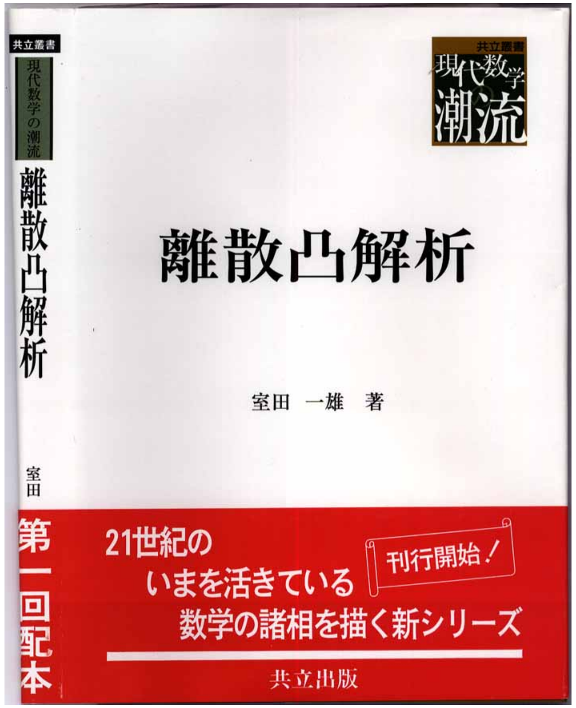
自己共役形　　($f^\bullet$: L凸　　h°: L凹)

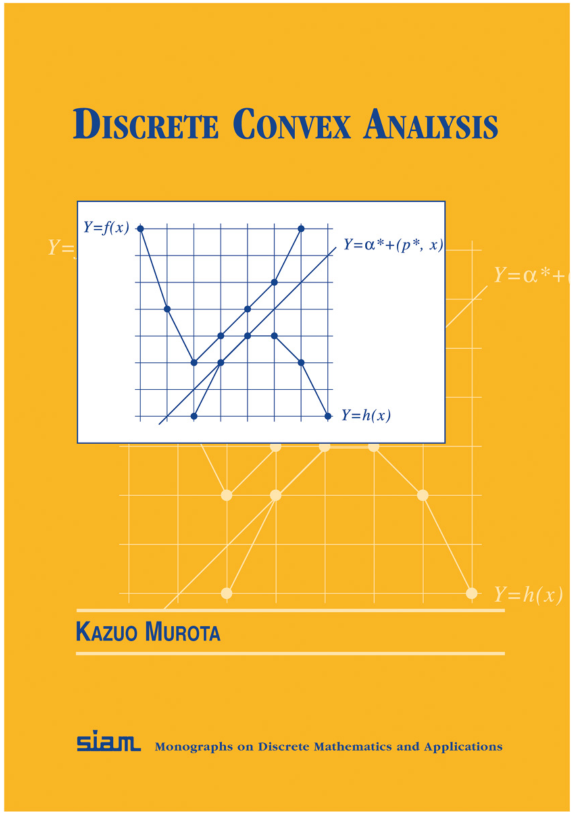
参 考 書

室田一雄：離散凸解析，共立，2001

K. Murota: Discrete Convex Analysis, SIAM, 2003

講義ビデオ　＠室田のホームページ　　（２０分　or　３時間）





E N D

2005-04-08