数理工学演習 (2015-04-08) の課題 5 (2) について解説する．

1 課題の再掲

課題５ $\mathcal{F}$ を有限集合 V の部分集合の族とする．各 $A \in \mathcal{F}$ に対して 1 変数の（離散）凸関数 $\varphi_A : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ が与えられているとき，

$$f(x) = \sum_{A \in \mathcal{F}} \varphi_A(x(A)) \qquad (x \in \mathbb{Z}^V)$$

と定義する．ただし $x(A) = \sum_{i \in A} x_i$ である．

（１）$\mathcal{F}$ が層族[1] のとき，

> **交換公理**[2]： 任意の $x, y \in \mathbb{Z}^V$ と $i \in \mathrm{supp}^+(x-y)$ に対し，ある $j \in \mathrm{supp}^-(x-y) \cup \{0\}$ が存在して
>
> $$f(x) + f(y) \geq f(x - e_i + e_j) + f(y + e_i - e_j)$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，

$$\mathrm{supp}^+(x) = \{i \mid x_i > 0\}, \quad \mathrm{supp}^-(x) = \{i \mid x_i < 0\}, \quad e_i \text{ は第 } i \text{ 単位ベクトル}, \quad e_0 = \mathbf{0}.$$

（２）適当な非退化条件の下では，f が上の交換公理を満たすことと，$\mathcal{F}$ が層族であることが同値であることを示せ．

「$\mathcal{F}$ が層族 $\Longrightarrow$ f が交換公理を満たす」は，（１）で示した（教科書などにも書いてある）ので，ここでは，適当な非退化条件の下で逆向きの命題（の対偶）「$\mathcal{F}$ が層族でない $\Longrightarrow$ f が交換公理を満たさない」が成り立つことを示す．

2 本質的な例

次の二つの例をみると，状況の本質が理解できる．

例 1. $V = \{1, 2, 3\}$ とする．$\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ は層族でない．

$$f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1 + x_2)^2 + b(x_2 + x_3)^2$$

を考える．ここで，$a > 0$, $b > 0$ とする．
$x = (1, 0, 1)$, $y = (0, 1, 0)$, $i = 1 \in \mathrm{supp}^+(x - y)$ とする．$\mathrm{supp}^-(x - y)$ は $j = 2$ のみ．

---

[1]「任意の $A, B \in \mathcal{F}$ に対して，$A \cap B = \emptyset$ または $A \subseteq B$ または $B \subseteq A$」が成り立つとき，$\mathcal{F}$ を層族という．

[2] この交換公理は，$\mathrm{M}^\natural$ 凸関数であるための必要十分条件であることが知られている．

$x' = x - e_i = (0,0,1)$, $\quad y' = y + e_i = (1,1,0)$,
$x'' = x - e_i + e_j = (0,1,1)$, $\quad y'' = y + e_i - e_j = (1,0,0)$ とおく．

$$\begin{aligned}
f(x) + f(y) &= f(1,0,1) + f(0,1,0) = (a+b) + (a+b) = 2a + 2b, \\
f(x') + f(y') &= f(0,0,1) + f(1,1,0) = (b) + (4a+b) = 4a + 2b, \\
f(x'') + f(y'') &= f(0,1,1) + f(1,0,0) = (a+4b) + (a) = 2a + 4b.
\end{aligned}$$

$f(x) + f(y) < f(x') + f(y')$ かつ $f(x) + f(y) < f(x'') + f(y'')$ となるので，f は交換公理を満たさない． ■

例 2. $V = \{1,2,3\}$ とする．$\mathcal{F} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$ は層族でない．

$$f(x_1,x_2,x_3) = a(x_1+x_2)^2 + b(x_2+x_3)^2 + c(x_1+x_3)^2$$

を考える．ここで $a \geq b \geq c > 0$ と仮定する．
まず，つぎの退化状況に注意する．

- (退化状況 1) $a = b = c$ のとき

$$f(x_1,x_2,x_3) = a\left[(x_1+x_2+x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]$$

  と書き直せるので，f は層凸関数である（層族は $\mathcal{F}' = \{\{1,2,3\},\{1\},\{2\},\{3\}\}$）．したがって，$f$ は交換公理を満たす．

- (退化状況 2) $a > b = c$ のとき

$$f(x_1,x_2,x_3) = (a-b)(x_1+x_2)^2 + b\left[(x_1+x_2+x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]$$

  と書き直せるので，f は層凸関数である（層族は $\mathcal{F}'' = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1\},\{2\},\{3\}\}$）．したがって，$f$ は交換公理を満たす．

非退化条件として $b \neq c$ を仮定し，このとき f が交換公理を満たさないことを示そう．
$x = (1,0,1)$, $y = (0,1,0)$, $i = 1 \in \mathrm{supp}^+(x-y)$ とする．$\mathrm{supp}^-(x-y)$ は $j = 2$ のみ．
$x' = x - e_i = (0,0,1)$, $\quad y' = y + e_i = (1,1,0)$,
$x'' = x - e_i + e_j = (0,1,1)$, $\quad y'' = y + e_i - e_j = (1,0,0)$ とおく．

$$\begin{aligned}
f(x) + f(y) &= f(1,0,1) + f(0,1,0) = (a+b+4c) + (a+b) = 2a + 2b + 4c, \\
f(x') + f(y') &= f(0,0,1) + f(1,1,0) = (b+c) + (4a+b+c) = 4a + 2b + 2c, \\
f(x'') + f(y'') &= f(0,1,1) + f(1,0,0) = (a+4b+c) + (a+c) = 2a + 4b + 2c.
\end{aligned}$$

仮定 $a \geq b > c$ より $f(x) + f(y) < f(x') + f(y')$ かつ $f(x) + f(y) < f(x'') + f(y'')$ となるので，f は交換公理を満たさない． ■

3　一般の場合の証明

関数の形は

$$f(x) = \sum_{A \in \mathcal{F}} \varphi_A(x(A)) \qquad (x \in \mathbb{Z}^V) \tag{1}$$

である．ここで $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ である．$V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ とする．

$$\eta_A(t) = \varphi_A(t) + \varphi_A(t+2) - 2\varphi_A(t+1) \quad (t \in \mathbb{Z})$$

とおくと，$\varphi_A : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ は離散凸関数だから，$\eta_A(t) \geq 0$ である．

命題 1. 式 (1) において $\mathcal{F}$ は層族でないとする．非退化の仮定（詳しくは注意 1, 注意 2 参照）の下では，f は交換公理を満たさない．

Proof. $\mathcal{F}$ は層族でないから，ある $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$ が存在して $B_1 \setminus B_2$, $B_1 \cap B_2$, $B_2 \setminus B_1$ がすべて非空集合である．$1 \in B_1 \setminus B_2$, $2 \in B_1 \cap B_2$, $3 \in B_2 \setminus B_1$ とする．

$A \in \mathcal{F}$ と $\{1, 2, 3\}$ との関係に着目して A を分類して，

$$\varphi_0(t) = \sum_{A \cap \{1,2,3\} = \emptyset} \varphi_A(t), \quad \varphi_k(t) = \sum_{A \cap \{1,2,3\} = \{k\}} \varphi_A(t), \quad (k = 1, 2, 3),$$
$$\varphi_{12}(t) = \sum_{A \cap \{1,2,3\} = \{1,2\}} \varphi_A(t), \quad \varphi_{23}(t) = \sum_{A \cap \{1,2,3\} = \{2,3\}} \varphi_A(t), \quad \varphi_{13}(t) = \sum_{A \cap \{1,2,3\} = \{1,3\}} \varphi_A(t)$$
$$\varphi_{123}(t) = \sum_{A \cap \{1,2,3\} = \{1,2,3\}} \varphi_A(t)$$

とおくと，$z = (z_1, z_2, z_3; 0, \ldots, 0)$ の形のベクトル z に対しては，

$$f_1(z) = \varphi_{12}(z_1 + z_2) + \varphi_{23}(z_2 + z_3) + \varphi_{13}(z_1 + z_3),$$
$$f_0(z) = \varphi_0(0) + \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2) + \varphi_3(z_3) + \varphi_{123}(z_1 + z_2 + z_3)$$

として，$f(z) = f_1(z) + f_0(z)$ が成り立つ．

2 階差分について

$$\eta_{12} = \varphi_{12}(0) + \varphi_{12}(2) - 2\varphi_{12}(1),$$
$$\eta_{23} = \varphi_{23}(0) + \varphi_{23}(2) - 2\varphi_{23}(1),$$
$$\eta_{13} = \varphi_{13}(0) + \varphi_{13}(2) - 2\varphi_{13}(1)$$

と定義する．対称性から，一般性を失うことなく $\eta_{12} \geq \eta_{23} \geq \eta_{13}$ としてよいが，さらに，非退化条件として $\eta_{23} \neq \eta_{13}$ を仮定する．すなわち

$$\eta_{12} \geq \eta_{23} > \eta_{13} \tag{2}$$

と仮定する．

交換公理において，$x = (1, 0, 1; 0, \ldots, 0)$, $y = (0, 1, 0; 0, \ldots, 0)$, $i = 1 \in \mathrm{supp}^+(x - y)$ とする．$\mathrm{supp}^-(x - y)$ は $j = 2$ のみ．$x' = x - e_i = (0, 0, 1; 0, \ldots, 0)$, $\quad y' = y + e_i =$

$(1,1,0;0,\dots,0)$; $x'' = x - e_i + e_j = (0,1,1;0,\dots,0)$,　$y'' = y + e_i - e_j = (1,0,0;0,\dots,0)$ とおく．見やすく並べると

$$\begin{aligned} x &= (1,0,1;0,\dots,0), & y &= (0,1,0;0,\dots,0) \\ x' &= (0,0,1;0,\dots,0), & y' &= (1,1,0;0,\dots,0) \\ x'' &= (0,1,1;0,\dots,0), & y'' &= (1,0,0;0,\dots,0) \end{aligned}$$

である．f_1 の値を計算すると，$C = 2\varphi_{12}(1) + 2\varphi_{23}(1) + 2\varphi_{13}(1)$ として，

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_1(y) &= 2\varphi_{12}(1) + 2\varphi_{23}(1) + [\varphi_{13}(2) + \varphi_{13}(0)] = C + \eta_{13}, \\ f_1(x') + f_1(y') &= [\varphi_{12}(0) + \varphi_{12}(2)] + 2\varphi_{23}(1) + 2\varphi_{13}(1) = C + \eta_{12}, \\ f_1(x'') + f_1(y'') &= 2\varphi_{12}(1) + [\varphi_{23}(2) + \varphi_{23}(0)] + 2\varphi_{13}(1) = C + \eta_{23} \end{aligned}$$

となる．

上式と不等式 (2) より，$f_1(x)+f_1(y) < f_1(x')+f_1(y')$ かつ $f_1(x)+f_1(y) < f_1(x'')+f_1(y'')$ となる．さらに，

$$f_0(x) + f_0(y) = f_0(x') + f_0(y') = f_0(x'') + f_0(y'')$$

であるから，$f(x) + f(y) < f(x') + f(y')$ かつ $f(x) + f(y) < f(x'') + f(y'')$ となる．以上より，f は交換公理を満たさないことが示された．　$\Box$

注意 1. 非退化条件 (2) を言い換えると，「$\eta_{12}, \eta_{23}, \eta_{13}$ の中の最小なものは一つでない」となる．これが成り立つための十分条件（非退化の仮定）としては，例えば，

> 互いに素である任意の $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \subseteq \mathcal{F}$ に対して $\displaystyle\sum_{A \in \mathcal{F}_1} \eta_A(0), \sum_{A \in \mathcal{F}_2} \eta_A(0), \sum_{A \in \mathcal{F}_3} \eta_A(0)$ はすべて異なる

を仮定すればよい．

注意 2. 交換公理を考えるときに，任意の $b \in \mathbb{Z}^V$ を用いて，$x = b + (1,0,1;0,\dots,0)$, $y = b + (0,1,0;0,\dots,0)$ としてよいことに着目する．そうすることにより，非退化の仮定を弱めることができるが，記述が面倒になるので省略する．

以上