スプライン補間

■ 補間多項式の表現

有限個の分点で区切られた各小区間上で 3 次多項式であって，2 階までの導関数が全域で連続な 3 次多項式を (3 次) **スプライン**と呼ぶ．与えられた n 個のデータ (x_k, y_k) $(k = 1, \ldots, n)$ に対して，補間条件:

$$S(x_k) = y_k \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

を満たすスプライン $S(x)$ を用いた補間を**スプライン補間**という．

スプライン補間は，1946 年 I. J. Schoenberg [1] によって提案され，1960 年代以後いろいろな分野に盛んに応用されるようになった．スプラインの名は，Schoenberg の論文にも言及されているように，滑らかな曲線を引く簡単な製図具に由来する．この製図具によって描かれる滑らかな曲線が連続な 2 階導関数をもつ区分的 3 次多項式になること (工学の分野では連続梁の理論で古くから知られている事実) から，Schoenberg は上記の数学的なスプラインの概念を導入したのである．

スプライン補間 $S(x)$ の表式を導こう．標本点が $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ と番号付けられているとする．$x = x_k$ における $S(x)$ の導関数値を d_k とおくと，小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ において

$$\begin{aligned} S(x) &= y_{k-1}\frac{(x_k - x)^2\{2(x - x_{k-1}) + h_k\}}{{h_k}^3} + y_k\frac{(x - x_{k-1})^2\{2(x_k - x) + h_k\}}{{h_k}^3} \\ &\quad + d_{k-1}\frac{(x_k - x)^2(x - x_{k-1})}{{h_k}^2} - d_k\frac{(x - x_{k-1})^2(x_k - x)}{{h_k}^2} \end{aligned} \tag{2}$$

と表される．ただし $h_k = x_k - x_{k-1}$ である．この作り方から，$S(x)$ の 1 階導関数は連続である．2 階導関数の連続性を考えよう．(2) より，

$$\begin{aligned} S''(x) &= \frac{6(y_k - y_{k-1})(x_k + x_{k-1} - 2x)}{{h_k}^3} \\ &\quad -d_{k-1}\frac{2(2x_k + x_{k-1} - 3x)}{{h_k}^2} - d_k\frac{2(2x_{k-1} + x_k - 3x)}{{h_k}^2} \end{aligned} \tag{3}$$

であるから，

$$S''(x_k - 0) = 2d_{k-1}/h_k + 4d_k/h_k - 6(y_k - y_{k-1})/{h_k}^2, \tag{4}$$

$$S''(x_k + 0) = -4d_k/h_{k+1} - 2d_{k+1}/h_{k+1} + 6(y_{k+1} - y_k)/{h_{k+1}}^2 \tag{5}$$

となるので，$S(x)$ の 2 階導関数の連続性条件

$$S''(x_k - 0) = S''(x_k + 0) \qquad (k = 2, \ldots, n-1) \tag{6}$$

は，d_k $(k = 1, \ldots, n)$ に関する連立 1 次方程式

$$\frac{1}{h_k}d_{k-1} + 2\left(\frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k+1}}\right)d_k + \frac{1}{h_{k+1}}d_{k+1} = 3\left(\frac{y_k - y_{k-1}}{{h_k}^2} + \frac{y_{k+1} - y_k}{{h_{k+1}}^2}\right) \tag{7}$$

[1] I. J. Schoenberg: Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part A, Part B, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 4 (1946), pp. 45–99, pp. 112–141.

$(k=2,\ldots,n-1)$ に翻訳される．この連立 1 次方程式には，未知数が n 個，方程式が $n-2$ 個あるので，d_k $(k=1,\ldots,n)$ を決定するには条件式がふたつ足りない．

そこで，さらに，$f'(x_1)$，$f'(x_n)$ が既知の場合には

$$\text{条件 I :} \qquad S'(x_1+0)=f'(x_1), \quad S'(x_n-0)=f'(x_n) \tag{8}$$

を，また，そのような情報がない場合には

$$\text{条件 II :} \qquad S''(x_1+0)=S''(x_n-0)=0 \tag{9}$$

を課すのが普通である．条件 I は

$$d_1=f'(x_1), \qquad d_n=f'(x_n) \tag{10}$$

と書くことができ，条件 II は

$$\frac{2}{h_2}d_1+\frac{1}{h_2}d_2=3\frac{y_2-y_1}{{h_2}^2}, \quad \frac{1}{h_n}d_{n-1}+\frac{2}{h_n}d_n=3\frac{y_n-y_{n-1}}{{h_n}^2} \tag{11}$$

と書くことができる．条件 I, II を満たすスプライン補間をそれぞれ $S_{\mathrm{I}}(x)$, $S_{\mathrm{II}}(x)$ と記す．

なお，$S(x)$ の最終的な表現式としては，通常の 3 次関数の表式

$$S(x)=y_k+\sum_{j=1}^{3}a_j^{(k)}(x-x_k)^j \qquad (x_k\le x\le x_{k+1}) \tag{12}$$

の係数 $a_j^{(k)}$ $(k=1,\ldots,n-1; j=1,2,3)$ を記憶するのが便利である．

■ 近似度

スプライン補間 $S_{\mathrm{I}}(x)$, $S_{\mathrm{II}}(x)$ の近似度について，次の 2 定理が成り立つ．

$$h_k = x_k-x_{k-1} \qquad (2\le k\le n), \tag{13}$$

$$\overline{h} = \max_{2\le k\le n} h_k, \qquad \underline{h} = \min_{2\le k\le n} h_k, \qquad \sigma=\overline{h}/\underline{h} \quad (\ge 1) \tag{14}$$

とおく．

定理 1 $f\in \mathrm{C}^4[x_1,x_n]$ に対して，

$$\|f^{(p)}-S_{\mathrm{I}}^{(p)}\|_\infty \le E_p\,\|f^{(4)}\|_\infty\,\overline{h}^{\,4-p} \qquad (p=0,1,2,3).$$

ただし，

$$E_0=5/384, \quad E_1=\sqrt{3}/216+1/24, \quad E_2=1/12+\sigma/4, \quad E_3=1/2+\sigma^2/2. \qquad \square$$

定理 2 $f\in \mathrm{C}^2[x_1,x_n]$ に対して，

$$\|f^{(p)}-S_{\mathrm{II}}^{(p)}\|_\infty \le \widetilde{E}_p\,\|f^{(2)}\|_\infty\,\overline{h}^{\,2-p} \qquad (p=0,1).$$

ただし，

$$\widetilde{E}_0=13/48, \quad \widetilde{E}_1=0.2514976565\cdots+5/6. \qquad \square$$

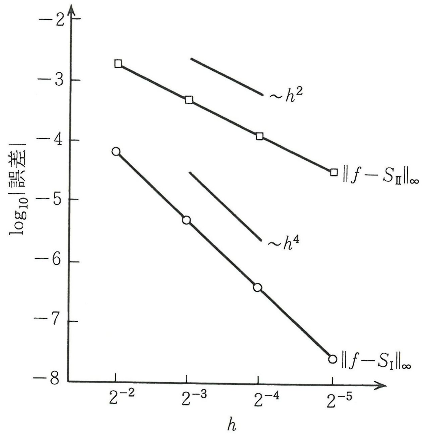

図 1: 3 次スプライン補間の誤差 ($\circ$: $\|f - S_{\mathrm{I}}\|_\infty$, $\square$: $\|f - S_{\mathrm{II}}\|_\infty$)
$f(x) = \sqrt{x+1.5}$ ($x \in [-1,1]$), $h = 2/n$

例 1 $f(x) = \sqrt{x+1.5}$ ($x \in [-1,1]$) に対する 3 次スプライン補間の誤差を図 1 に示す．標本点は $x_k = -1 + kh$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) ($h = 2/n$) である．上の定理の通り，

$$\|f - S_{\mathrm{I}}\|_\infty = \mathrm{O}(h^4), \qquad \|f - S_{\mathrm{II}}\|_\infty = \mathrm{O}(h^2)$$

であることが見てとれる． $\square$

[この資料は，杉原正顯, 室田一雄，数値計算法の数理，9 章 (岩波書店, 1994) の記述に基づいて編集したものである．]

以上 (2013-10-25)