縮小写像の原理 と 反復法 (Advanced Topic)

■反復法とその収束

反復法の一般形： $x_{k+1} = F(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$.
このとき，$x_k = F^k(x_0)$ が成り立つ．ただし $F^k(x)$ は $F(F(F(F(\cdots F(x)\cdots))))$ のように k 回適用したもの．

・このように定義される列 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ は収束するか．その（十分）条件が欲しい．
・収束するとき，極限は何か．極限は初期値に依存するか．
$\Longrightarrow$
極限が存在するとき，$\overline{x} = \lim_{k\to\infty} x_k$ とおくと，F が連続ならば，$\overline{x} = F(\overline{x})$ が成り立つ．すなわち，極限は F の不動点である．一般には，$\overline{x}$ は初期値 x_0 に依存する．

■縮小写像の原理

$X \subseteq \mathbf{R}^n$ として関数（写像）$F : X \to X$ を考える．X のノルムを $\|\cdot\|$ とする．

定義 1（縮小写像）：$F : X \to X$ が 縮小写像 $\Longleftrightarrow$ ある μ $(0 \le \mu < 1)$ が存在して

$$\|F(x) - F(y)\| \le \mu\|x - y\| \qquad (x, y \in X). \tag{1}$$

・縮小写像は連続である（証明は容易なので，試みよ）.

定理 1（縮小写像の原理）：$X \subseteq \mathbf{R}^n$ が閉集合，$F : X \to X$ が縮小写像とする．
(i) F は X の中に唯一の不動点 ($\overline{x} = F(\overline{x})$ を満たす $\overline{x}$) をもつ．
(ii) 任意の $x \in X$ に対して，$\lim_{k\to\infty} F^k(x) = \overline{x}$.

証明： (1) $x_k = F^k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ と定義すると，$x_0 = x$ として，

$$\|x_k - x_{k+1}\| = \|F(x_{k-1}) - F(x_k)\| \le \mu\|x_{k-1} - x_k\|.$$

したがって $\|x_k - x_{k+1}\| \le \mu^k\|x_0 - x_1\|$ であり，$0 < k < l$ のとき，

$$\begin{aligned}\|x_k - x_l\| &\le \|x_k - x_{k+1}\| + \|x_{k+1} - x_{k+2}\| + \cdots + \|x_{l-1} - x_l\| \\ &\le (\mu^k + \mu^{k+1} + \cdots + \mu^{l-1})\|x_0 - x_1\| = \frac{\mu^k - \mu^l}{1 - \mu}\|x_0 - x_1\|.\end{aligned}$$

最後の項は $k, l \to \infty$ で 0 に収束するから，点列 $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ は Cauchy 列．
(2) $\mathbf{R}^n$ の完備性により，ある $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$ が存在して $x_k \to \overline{x}$.
(3) (x_k) は X の点列で，X は閉集合だから，その極限 $\overline{x} \in X$.
(4) $x_{k+1} = F(x_k)$ において $k \to \infty$ として，F の連続性を使うと，$\overline{x} = F(\overline{x})$.
(5) $\overline{y}$ も不動点とすると，$\|\overline{x} - \overline{y}\| = \|F(\overline{x}) - F(\overline{y})\| \le \mu\|\overline{x} - \overline{y}\|$.
ここで $0 \le \mu < 1$ だから，$\overline{x} = \overline{y}$. (証終)

・縮小写像の原理は，完備な 距離空間 (X, d) と関数 $F : X \to X$ に一般化できる．

以上 (2013-08-05)