多項式の計算法 (Horner 法)

一般に複素数を係数とする多項式

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^k \tag{1}$$

の値を計算するには,

$$p(z) = (\cdots((a_0 z + a_1)z + a_2)z \cdots + a_{n-1})z + a_n \tag{2}$$

の形で計算するとよい（乗算回数は n 回である）．この計算法は漸化式：

$$p_{n+1}(z) = 0, \quad p_n(z) = a_0; \quad p_k(z) = z p_{k+1}(z) + a_{n-k} \ (k = n-1, n-2, \ldots, 0) \tag{3}$$

として書ける．このとき $p(z) = p_0(z)$ である．これを **Horner 法**という．

上の漸化式を利用すると，導関数値も効率よく計算できる．導関数値 $p'(z)$ は，式 (3) を微分した漸化式

$$p'_k(z) = z p'_{k+1}(z) + p_{k+1}(z) \qquad (k = n-1, n-2, \ldots, 0) \tag{4}$$

(ただし $p'_{n+1}(z) = p'_n(z) = 0$) から計算される．ここで $p'(z) = p'_0(z)$ である．

原点を z に移動したときの表現式

$$p(z+\zeta) = \sum_{k=0}^{n} c_{n-k} \zeta^k \tag{5}$$

の展開係数 c_{n-k} は，k 階の導関数値によって

$$c_{n-k} = p^{(k)}(z)/k! \tag{6}$$

と表される．この値も漸化式 (3) を利用して，以下のように計算することができる．

漸化式 (3) を l (≥ 1) 回微分して,

$$p_k^{(l)}(z)/l! = q_k^{(l)}(z) \tag{7}$$

とおけば,

$$\begin{aligned} &q_{n+1}^{(l)}(z) = q_n^{(l)}(z) = 0, \\ &q_k^{(l)}(z) = z q_{k+1}^{(l)}(z) + q_{k+1}^{(l-1)}(z) \quad (k = n-1, n-2, \ldots, 0) \end{aligned} \tag{8}$$

となる．この漸化式から

$$c_{n-l} = p^{(l)}(z)/l! = q_0^{(l)}(z) \tag{9}$$

が求められる．

さらに，$q_k^{(l)}(z) = 0$ $(k + l \geq n+1)$ に着目して,

$$b_k^{(l)}(z) = q_{n-l-k}^{(l)}(z) \qquad (0 \leq k \leq n-l) \tag{10}$$

とおくと，漸化式 (8) の計算を一つの 1 次元配列 $b[k]$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ だけを用いて進めることができるようになる (以下の算法で $b^{(l)}[k] = b_k^{(l)}(z)$ であるが，実際の計算では上添字 $^{(l)}$ を無視する).

組立除法 (Horner 法)

1°: $b^{(-1)}[k] := a_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$

2°: $l = 0, 1, \ldots, n$ に対して順次

$$b^{(l)}[0] := a_0;\ b^{(l)}[k] := b^{(l)}[k-1]z + b^{(l-1)}[k] \quad (k = 1, \ldots, n-l)$$

を計算する． □

算法の終了時に

$$b[n-k] = b^{(k)}[n-k] = c_{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{11}$$

であり，乗算回数は全体で $n(n+1)/2$ になる．(算法の 2° の反復を途中で止めて $l = 0, 1, \ldots, m$ とすれば，$b[n-k] = c_{n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ であることに注意．)

例 1 3 次式 $p(z) = z^3 - 3z + 3$ に対して，原点を $z = -2.11$ に移動した (5) の形に展開する．10 進 3 桁 4 捨 5 入計算の組立除法は次のようになる．

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$b^{(-1)}[k]$	1.00	0.00	-3.00	3.00
$(b^{(0)}[k-1]z)$		-2.11	4.45	-3.06
$b^{(0)}[k]$	1.00	-2.11	1.45	$\underline{-0.06 = c_3}$
$(b^{(1)}[k-1]z)$		-2.11	8.90	
$b^{(1)}[k]$	1.00	-4.22	$\underline{10.4 = c_2}$	
$(b^{(2)}[k-1]z)$		-2.11		
$b^{(2)}[k]$	1.00	$\underline{-6.33 = c_1}$		

したがって，$p(\zeta - 2.11) = \zeta^3 - 6.33\zeta^2 + 10.4\zeta - 0.06$ である． □

以上 (2013-10-07)