常微分方程式の数値解法

初期値 $y(0)$ が与えられているとして，初期値問題：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = f(x,y), \qquad x > 0$$

を考える.「格子」$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$，「近似解」$y_n \simeq y(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ とおく．以下では簡単のため,「格子幅」$x_{n+1} - x_n = h$ は一定とする.

[**一段法**]

- 陽的 Euler 法（１次）：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$.
- 陰的 Euler 法（１次）：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$.
- 台形則（２次）：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n)}{2}$.
- （標準的な４次）Runge–Kutta 法：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{1}{6}k_1 + \dfrac{1}{3}k_2 + \dfrac{1}{3}k_3 + \dfrac{1}{6}k_4$.

  ただし，$k_1 = f(x_n, y_n)$, $\quad k_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}k_1)$,

  $$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3).$$

[**多段法**]　ここでは $f_n = f(x_n, y_n)$ と略記する.

- 中点則（２次）：$\dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = f_n$.
- 陽的 Adams 法：
  - １次：陽的 Euler 法と一致.
  - ２次：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{3}{2}f_n - \dfrac{1}{2}f_{n-1}$.
  - ３次：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{23}{12}f_n - \dfrac{16}{12}f_{n-1} + \dfrac{5}{12}f_{n-2}$.
- 陰的 Adams 法：
  - １次：陰的 Euler 法と一致.
  - ２次：台形則と一致.
  - ３次：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{5}{12}f_{n+1} + \dfrac{8}{12}f_n - \dfrac{1}{12}f_{n-1}$.

『数値解析入門 [増補版]』山本哲朗，サイエンス社より：中点則の不安定現象

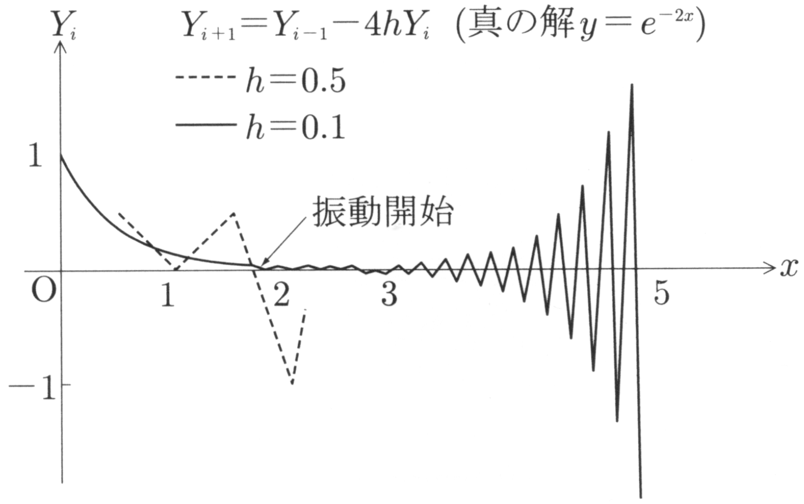
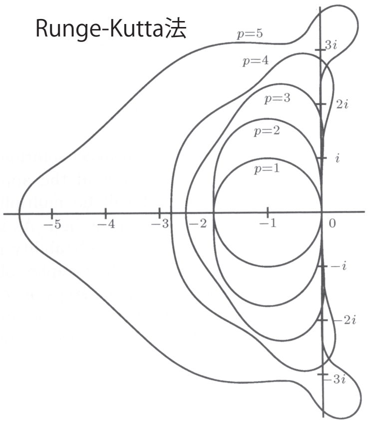
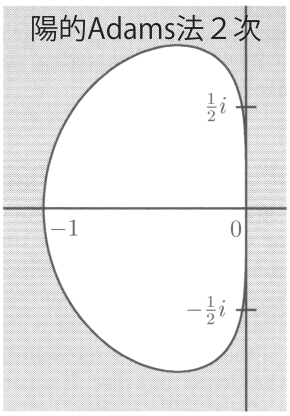
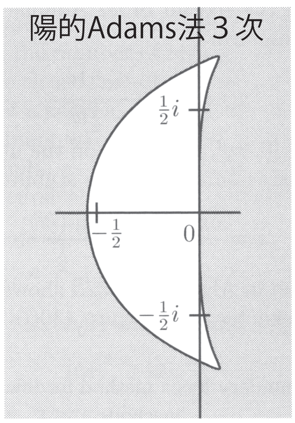


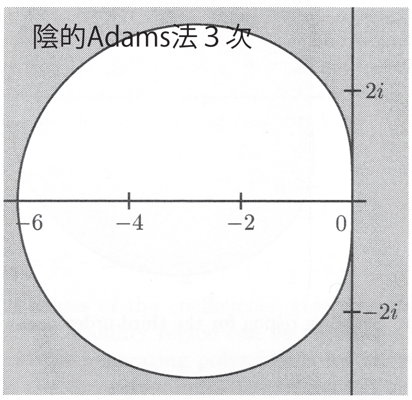
図 10.4 $y' = -2y,\ y(0) = 1$ に対する中点公式

"Numerical Methods for Ordinary Differential Equations" (Butcher,Wiley) より
各種公式の安定領域 （それぞれ線の内側が安定）









以上 (2013-12-05)