マーコビッツモデルと効率的フロンティア（改訂版）

2006-11-18

記号
μ_i: 資産 i の期待収益率 $(i = 1, \ldots, n)$
$\Sigma = (\sigma_{ij})$：分散・共分散行列
$\bar{r}$: ポートフォリオ $(w_1, \ldots, w_n)$ の期待収益率

1 投資ポジションに制約のない場合（空売りありの場合）

(1) マーコビッツモデル：

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = \bar{r}, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{aligned}$$

(2) 最適値の凸性：上の数理計画問題（最適化問題）の最小値は $\bar{r}$ の関数である．この値を $\varphi_{\mathrm{S}}(\bar{r})$ とすると，$\varphi_{\mathrm{S}}(\bar{r})$ は凸関数になる．

(3) 等式制約の場合のラグランジュ乗数法：

$$L(w, \alpha, \beta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} + \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i - \bar{r}\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right). \tag{1}$$

(4) 双対問題（一般形）： Q を半正定値対称行列として

$$\text{(P)} \ \min_{x} \ \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx \ \ \text{s.t. } Ax = b \quad \longleftrightarrow \quad \text{(D)} \ \max_{y,z} \ b^{\mathrm{T}}y - \frac{1}{2}z^{\mathrm{T}}Qz \ \ \text{s.t. } A^{\mathrm{T}}y - Qz = 0$$

双対定理： (P) の min = (D) の max

行列 Q が正則のときには，双対問題 (D) を陽に解くことができる．制約条件 $A^{\mathrm{T}}y - Qz = 0$ より $z = Q^{-1}A^{\mathrm{T}}y$. したがって，(D) は 2 次関数

$$b^{\mathrm{T}}y - \frac{1}{2}y^{\mathrm{T}}AQ^{-1}A^{\mathrm{T}}y$$

の無制約最大化問題と等価である．この最大値は $y = (AQ^{-1}A^{\mathrm{T}})^{-1}b$ で達成され，

$$\text{(P) の min} = \text{(D) の max} = \frac{1}{2}b^{\mathrm{T}}(AQ^{-1}A^{\mathrm{T}})^{-1}b.$$

(5) 最小リスクの関数形：マーコビッツモデルでは

$$Q = \Sigma, \quad A = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \bar{r} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

である．$\Sigma = (\sigma_{ij})$ が正則として

$$\varphi_{\mathrm{S}}(\bar{r}) = \frac{1}{2} b^{\mathrm{T}} (A\Sigma^{-1}A^{\mathrm{T}})^{-1} b. \tag{3}$$

この右辺は $\bar{r}$ の 2 次関数だから $\alpha\bar{r}^2 + \beta\bar{r} + \gamma$ の形である．$\Sigma = (\sigma_{ij})$ が正則ならば行列 $(A\Sigma^{-1}A^{\mathrm{T}})^{-1}$ は正定値対称なので，$\alpha > 0$ となり，$\sigma = \sqrt{2\varphi_{\mathrm{S}}(\bar{r})}$ は双曲線である．

(6) 最適ポートフォリオ: 最適なポートフォリオ $w = (w_1, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}}$ を求めよう．

• 第 1 のやり方．上の計算を眺めて，天下りに

$$w = \Sigma^{-1}A^{\mathrm{T}}(A\Sigma^{-1}A^{\mathrm{T}})^{-1}b \tag{4}$$

とおいてみると，

$$Aw = A\Sigma^{-1}A^{\mathrm{T}}(A\Sigma^{-1}A^{\mathrm{T}})^{-1}b = b$$

となるので，この w は制約条件を満たすことが分かる．また，

$$\frac{1}{2}w^{\mathrm{T}}\Sigma w = \frac{1}{2}(\Sigma^{-1}A^{\mathrm{T}}(A\Sigma^{-1}A^{\mathrm{T}})^{-1}b)^{\mathrm{T}} \cdot \Sigma \cdot \Sigma^{-1}A^{\mathrm{T}}(A\Sigma^{-1}A^{\mathrm{T}})^{-1}b = \varphi_{\mathrm{S}}(\bar{r})$$

となるので，この w が最小分散を与えることも分かる．したがって，式 (4) の w が最適ポートフォリオである．

• 第 2 のやり方．ラグランジュ乗数法により，地道に計算する．式 (1) の関数 L （ラグランジュ関数という）を偏微分して 0 とおくと，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial w_i} &= \sum_{j=1}^{n} w_j\sigma_{ij} + \alpha\mu_i + \beta = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \\
\frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \sum_{j=1}^{n} w_j\mu_j - \bar{r} = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= \sum_{j=1}^{n} w_j - 1 = 0
\end{aligned}$$

となる．これを行列形で書くと，

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} & \mu_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} & \mu_n & 1 \\ \mu_1 & \cdots & \mu_n & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{r} \\ 1 \end{bmatrix}$$

である．式 (2) で定義した行列を使ってこの式をコンパクトに書けば

$$\Sigma w + A^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0, \qquad Aw = b$$

となる．この第 1 式を $w = -\Sigma^{-1}A^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ と変形して第 2 式に代入して計算すると

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -(A\Sigma^{-1}A^{\mathrm{T}})^{-1}b, \qquad w = \Sigma^{-1}A^{\mathrm{T}}(A\Sigma^{-1}A^{\mathrm{T}})^{-1}b$$

が得られる．この w は第 1 の方法で求めた最適ポートフォリオに一致している．

2　投資ポジションに非負制約のある場合（空売りなしの場合）

(1) マーコビッツモデル：

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = \bar{r}, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad w_1, \ldots, w_n \geq 0 \end{aligned}$$

(2) 最適値の凸性：上の数理計画問題（最適化問題）の最小値は $\bar{r}$ の関数である．この値を $\varphi_{\mathrm{L}}(\bar{r})$ とすると，$\varphi_{\mathrm{L}}(\bar{r})$ は凸関数になる．

(3) 不等式制約の場合のラグランジュ乗数法:　$(\gamma_1, \ldots, \gamma_n \geq 0)$

$$L(w, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} + \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i - \bar{r}\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right) - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i w_i. \quad (5)$$

(4) 双対問題（一般形）：　Q を半正定値対称行列として

$$\text{(P)} \ \min_{x} \ \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx \ \text{ s.t. } Ax = b, x \geq 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{(D)} \ \max_{y,z} \ b^{\mathrm{T}}y - \frac{1}{2}z^{\mathrm{T}}Qz \ \text{ s.t. } A^{\mathrm{T}}y - Qz \leq 0$$

双対定理：(P) の min = (D) の max

(5) 最小リスクの関数形：$\Sigma = (\sigma_{ij})$ が正則として，

$$Q = \Sigma, \quad A = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \bar{r} \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする．$\bar{r}$ に応じて，$w_i > 0$ なる i の集合が決まる．これに対応する A の列を集めてできる部分行列を $\hat{A}$ とし，対応する Σ の部分行列を $\hat{\Sigma}$ として

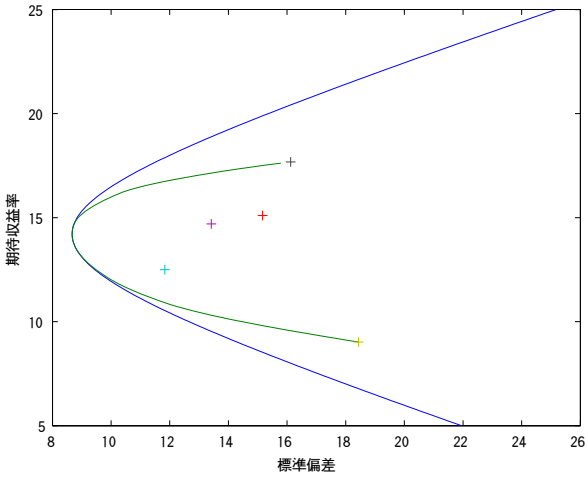
$$\varphi_{\mathrm{L}}(\bar{r}) = \frac{1}{2}b^{\mathrm{T}}(\hat{A}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{A}^{\mathrm{T}})^{-1}b.$$

したがって，$\sigma = \sqrt{2\varphi_{\mathrm{L}}(\bar{r})}$ は区分的双曲線である．

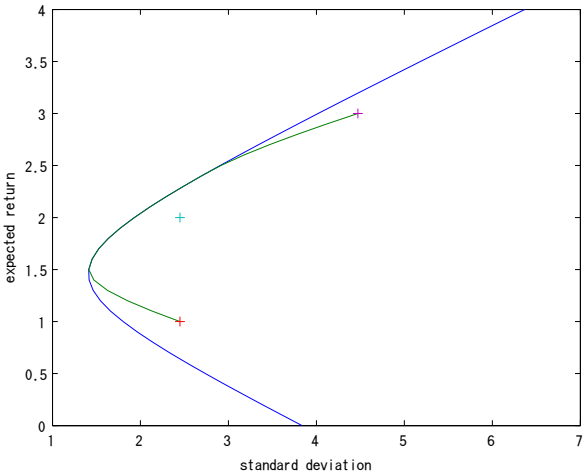
3　例題

例１．(Luenberger の教科書 (§6.7) にある例)

$$\mu = \begin{bmatrix} 15.1 \\ 12.5 \\ 14.7 \\ 9.02 \\ 17.68 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 230 & 93 & 62 & 74 & -23 \\ 93 & 140 & 22 & 56 & 26 \\ 62 & 22 & 180 & 78 & -27 \\ 74 & 56 & 78 & 340 & -56 \\ -23 & 26 & -27 & -56 & 260 \end{bmatrix}$$

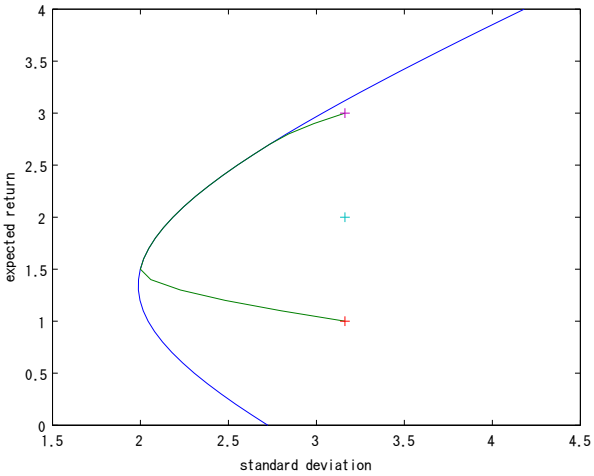


例２.



$$\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 20 \end{bmatrix}$$

例３.（３つの資産の分散が同じという極端な例）



$$\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 4 \\ 5 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$