基礎数理　室田

基本演習 解答　　第１部：集合

vers. 2009-09-07

問題 S1. 以下のように計算すればよい．

$$\begin{aligned} h(A)+h(B) &= [h(A\setminus B)+h(A\cap B)]+[h(B\setminus A)+h(A\cap B)] \\ &= [h(A\setminus B)+h(A\cap B)+h(B\setminus A)]+h(A\cap B) \\ &= h(A\cup B)+h(A\cap B). \end{aligned}$$

なお，$A=\emptyset$ のときには $h(A)=0$ であることに注意．

問題 S2.

$$a=\max_{i\in A\setminus B} w_i,\quad b=\max_{i\in B\setminus A} w_i,\quad c=\max_{i\in A\cap B} w_i$$

とおく．ただし，空集合上の最大値は $-\infty$ と約束する．すると，

$$f(A)=\max(a,c),\quad f(B)=\max(b,c),\quad f(A\cap B)=c,\quad f(A\cup B)=\max(a,b,c)$$

であり，

$$\begin{aligned} f(A)+f(B)&=\max(a+b,a+c,b+c,2c),\\ f(A\cap B)+f(A\cup B)&=\max(a+c,b+c,2c) \end{aligned}$$

となるので

$$f(A)+f(B)\geq f(A\cap B)+f(A\cup B).$$

問題 S3. 同値関係の満たすべき３つの条件

反射律： $a\sim a$

対称律： $a\sim b\Rightarrow b\sim a$

推移律： $a\sim b,\, b\sim c\Rightarrow a\sim c$

をチェックすればよい．反射律は $a-a=0$ で成立．対称律は $a-b$ が 6 の倍数なら $b-a$ も 6 の倍数であるから成立．推移律は $a-b=6m,\ b-c=6n$ とすると $a-c=6(m+n)$ となるから成立．

問題 S4. 反射律，対称律は明らか．推移律は次のように示される．$(a,b)\sim(a',b'),\ (a',b')\sim(a'',b'')$ とすると，$ab'=a'b,\ a'b''=a''b'$ である．もし $a'=0$ なら，$b'\neq 0$ より $a=a''=0$ であり $ab''=a''b$ が成り立つ．もし $a'\neq 0$ なら，上式を辺々掛けると $(ab'')(a'b')=(a''b)(a'b')$ となり，$ab''=a''b$ となる．いずれの場合にも $ab''=a''b$，すなわち $(a,b)\sim(a'',b'')$ となる．

問題 S5. （１）同値関係の満たすべき３つの条件

反射律： $A\sim A$

対称律： $A\sim B\Rightarrow B\sim A$

推移律： $A\sim B,\, B\sim C\Rightarrow A\sim C$

をチェックすればよい．反射律は $P=I$ で成立，対称律は P^{-1} を P だと思えばよい．推移律は $P^{-1}AP=B,\ Q^{-1}BQ=C$ とすると，$R=PQ$ に対して $R^{-1}AR=C$．

（2）$A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$ であるとき，$A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2$ となるかどうかを調べればよい．例えば，$A_1 = B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると，$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_1 + B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となり，$A_1 + A_2 \not\sim B_1 + B_2$ である（同値なものは階数が等しいことに注意）．したがって，well-defined でない．

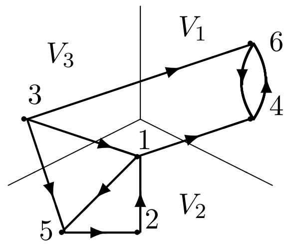
問題 S6. （1）反射律，対称律は明らか．推移律「$a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$」は，擬順序が推移律を満たすこと「$a \preceq b, b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$」,「$b \preceq a, c \preceq b \Rightarrow c \preceq a$」を使って容易に示される．

（2）代表元のとりかたによらないことを示せばよい．$a_i \in C_i$, $a_j \in C_j$ に対し，$a_i \preceq a_j$ であるとする．別の代表元 $a'_i \in C_i$, $a'_j \in C_j$ に対し，$a_i \sim a'_i$, $a_j \sim a'_j$ より，$a'_i \preceq a_i$, $a_j \preceq a'_j$ となる．したがって，$a'_i \preceq a_i$, $a_i \preceq a_j$, $a_j \preceq a'_j$ であり，推移律より，$a'_i \preceq a'_j$ が成り立つ．

（3）反射律は明らか．推移律は $\preceq$ の推移律より明らか．反対称律も容易である．すなわち，$C_i \leq C_j$ かつ $C_j \leq C_i$ とすると，$a_i \preceq a_j$ かつ $a_j \preceq a_i$ となって $a_i \sim a_j$ であるから，$C_i = C_j$.

問題 S7. 強連結成分：$V_1 = \{4, 6\}$, $V_2 = \{1, 2, 5\}$, $V_3 = \{3\}$

順序：$V_1 \prec V_2 \prec V_3$



問題 S8. 記号 $\mathcal{L}$ の定義は $\mathcal{L} = \{A \mid \rho(A) \leq \rho(B),\ \forall B\}$ である．任意の $X, Y \in \mathcal{L}$ に対して，$X \cup Y,\ X \cap Y \in \mathcal{L}$ が成り立つことを示せばよい．ρ の最小値を m とすると，$\rho(X) = \rho(Y) = m$, $\rho(X \cup Y) \geq m$, $\rho(X \cap Y) \geq m$ なので，劣モジュラ不等式 $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$ と合わせて

$$2m = \rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \geq 2m.$$

したがって $\rho(X \cup Y) = \rho(X \cap Y) = m$ が成り立つ．

問題 S9. 同値関係：同値類の集合で表示して $\{\{a, b, c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ の３パターン．全順序：$a \prec b \prec c$ の１パターン．

半順序：$[a \prec b \prec c]$, $[a \prec b, a \prec c]$, $[a \prec b, c \prec b]$, $[a \prec b$ (で c とは順序関係なし)$]$, $[a, b, c$ がばらばらで順序関係なし$]$ の５パターン．

擬順序：同値関係における同値類の間に半順序を与えればよいので，

$\{\{a, b, c\}\}$ から１パターン．$\{\{a, b\}, \{c\}\}$ から $[\{a, b\} \prec \{c\}]$, $[\{a, b\} \succ \{c\}]$, $[\{a, b\}$ と $\{c\}$ は無関係$]$ の３パターン．$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ から半順序に示した５パターン．

問題 S10. 問題 S9 の擬順序と１対１に対応する９パターン．例えば，$\{\{a, b, c\}\}$ に対応する分配束は $\{\emptyset, S\}$．$[\{a, b\} \prec \{c\}]$ に対応する分配束は $\{\emptyset, \{a, b\}, S\}$．$[\{a, b\}$ と $\{c\}$ は無関係$]$ に対応する分配束は $\{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, S\}$．$[a \prec b, a \prec c]$ に対応する分配束は $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, S\}$．$[a \prec b, c \prec b]$ に対応する分配束は $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, S\}$.

以上