閉集合と開集合

基礎数理

一般の距離空間 (X,d) を考える．　［基本的な例：$X=\mathbf{R}$, $d(x,y)=|x-y|$］

◎閉集合と開集合

X の部分集合 F, A を考える．

定義（閉集合）：F が閉集合 $\iff$ $a_n \in F$, $a \in X$, $a_n \to a$ ならば $a \in F$.

言葉で書くと……：F の要素からなる点列 $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ で (X,d) において収束するものを任意にとる．その収束先を a とすると，当然 $a \in X$ であるが，$a \in F$ とは限らない．(i) $a_n \in F$, (ii) $a_n \to a$ の二つの条件を満たすどんな点列 $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ に対しても $a \in F$ となるとき，F を閉集合という．

・例１：閉区間 $[a,b]=\{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$ は，$\mathbf{R}$ における閉集合．

・例２：$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y \le 2, x+2y \le 3, x^2 \le y\}$ は，$\mathbf{R}^2$ における閉集合．

・例３：整数全体 $\mathbf{Z}$ は，$\mathbf{R}$ における閉集合．

・X（空間全体）と $\emptyset$（空集合）は，X における閉集合．

・$\mathbf{R}^n$ においては，有界閉集合＝コンパクト集合 (→資料「有界閉とコンパクト」参照).

定義（開集合）：A が開集合 $\iff$ $X \setminus A$ が閉集合.

命題１：A が開集合 $\iff$ $\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0$: $U(a,\varepsilon) \subseteq A$.

ただし $U(a,\varepsilon)=\{x \in X \mid d(x,a)<\varepsilon\}$　←中心 a，半径 ε の開球（不等号＜に注意）

証明：$F = X \setminus A$ とおいて示すべき命題を書き直すと

$$F \text{ が閉集合} \iff \forall a \notin F, \exists \varepsilon > 0\colon U(a,\varepsilon) \cap F = \emptyset.$$

これの対偶は

$$F \text{ が閉集合でない} \iff \exists a \notin F, \forall \varepsilon > 0\colon U(a,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset. \quad \cdots\cdots(*)$$

［$(*)$ の $\Rightarrow$ の証］F が閉でないので，$\exists (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \subseteq F$, $\exists a \in X$: $a_n \to a$, $a \notin F$ となる．$a_n \to a$ だから，$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \ge n_0$: $a_n \in U(a,\varepsilon)$. ゆえに $U(a,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$.

［$(*)$ の $\Leftarrow$ の証］$(*)$ の右辺において a を固定する．$\varepsilon = 1/n$ に対して $\exists a_n \in U(a,\varepsilon) \cap F$. このとき点列 $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は (i) $a_n \in F$, (ii) $a_n \to a$ の二つの条件を満たすのに $a \notin F$ となっている．したがって，F は閉集合でない．

◎閉集合・開集合の和集合・積集合

命題２（有限個の場合）

（１）有限個の閉集合 $F_1,\ldots,F_m$ の和集合 $\bigcup_{n=1}^m F_n$，積集合 $\bigcap_{n=1}^m F_n$ は閉集合である．

（２）有限個の開集合 $A_1,\ldots,A_m$ の積集合 $\bigcap_{n=1}^m A_n$，和集合 $\bigcup_{n=1}^m A_n$ は開集合である．

命題３（無限個の場合）

（１）無限個の閉集合 $F_1,F_2,\ldots$ の和集合 $\bigcup_{n=1}^\infty F_n$ は閉集合とは限らない．
　　一方，積集合 $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$ は閉集合である．

（２）無限個の開集合 $A_1,A_2,\ldots$ の積集合 $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ は開集合とは限らない．
　　一方，和集合 $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ は開集合である．

・例１：$\mathbf{R}$ において，閉区間 $F_n=[1/n,1]$ の和集合は $(0,1]$ で，これは閉集合でない．

・例２：$\mathbf{R}$ において，１点の集合 $F_n=\{1/n\}$ は閉集合である．和集合 $G=\bigcup_{n=1}^\infty F_n$ は閉集合でない．なぜなら，数列 (a_n) を $a_n=1/n$ と定義すると，$a_n \in G$ で，$a_n \to 0 \in \mathbf{R}$ であるが，極限 $a=0$ は集合 G に含まれない．

・例３：閉区間 $F_n=[1/n-1/n^2, 1/n+1/n^2]$ についても例２と同様．　以上 (2010-12-07)