基礎数理　室田

有界閉とコンパクト

４段階に分けて理解する．

◎第１段階：詳しいことはともかく，事実として，

有限次元空間 $\mathbf{R}^m$ では「有界閉集合 $\Longleftrightarrow$ コンパクト集合」
無限次元空間では　　「有界閉集合 $\Longleftarrow$ コンパクト集合」　のみ成立

（注意） $\mathbf{R}^m$ の距離は，通常のユークリッドノルム $\|\cdot\|_2$ から決まる距離としておく．（実は，ノルムのとり方によらずに，上のことが成り立つ．）
（注意） $\mathbf{R}^m$ の部分集合 K が有界とは，ある実数 $M > 0$ が存在して，任意の $x \in K$ に対して $\|x\|_2 \leq M$ が成り立つことをいう．

◎第２段階：コンパクトだと，なぜ嬉しいか．

・コンパクト集合上の連続関数は，最大値と最小値をもつ　　　$\longleftarrow$ 最適化ができる
・コンパクト集合上の連続関数は，一様連続　　　$\longleftarrow$ 近似ができる

例えば,
・$f(x) = x(1-x)$ は，開区間 $(0,1)$ において最大値をもつ（$f(1/2) = 1/4$）が,最小値をもたない.
・$f(x) = \tan x$ は，開区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ において最大値も最小値ももたない.
・$f(x) = 1/x$ は，開区間 $(0,1)$ において連続であるが一様連続でない.

◎第３段階：点列によるコンパクト性の定義

(X,d): 距離空間,　　K: X の部分集合

定義（点列コンパクト）:集合 K が点列コンパクト $\Longleftrightarrow$ K に含まれる任意の点列 $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が K の中の点に収束する部分列をもつ.

定義（有界）：集合 K が有界 $\Longleftrightarrow$ ある $M > 0$ と $a \in K$ が存在して，任意の $x \in K$ に対して $d(x,a) \leq M$ が成り立つ.

（注意） 有界の定義における a は，実は，任意に選ぶことができる．すなわち,

$$\begin{aligned} & \exists M > 0,\ \exists a \in K,\ \forall x \in K: \quad d(x,a) \leq M \\ \Longleftrightarrow\quad & \exists M > 0,\ \forall a \in K,\ \forall x \in K: \quad d(x,a) \leq M \end{aligned}$$

が成り立つ.（証明:$\Leftarrow$ は明らか. $\Rightarrow$ は，ある $a \in K$ について成り立つとき，別の $b \in K$ を任意にとると，任意の $x \in K$ に対して $d(x,b) \leq d(x,a) + d(b,a) \leq 2M$ となる.）

定理１：任意の距離空間 (X,d) において「点列コンパクト $\Longrightarrow$ 有界閉」.

証明：(X,d) における点列コンパクト集合 K を考える.
（１）K が有界であることの証明.
　K の任意の点 a を一つ固定する（これは原点としての役割をするだけである）.
　K が有界でないとして，矛盾を導こう（背理法）．このとき，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$d(a,x_n) \geq n$ を満たす K の点 x_n が存在する．このようにして作った点列 $(x_n)_n$ のどんな部分列も有界列ではない（なぜなら，任意の部分列 $(x_{n(k)})_k$ に対して $d(a,x_{n(k)}) \geq n(k)$ で，$n(k) \to \infty$ だから）.
　一般に,「収束列は有界列」であるから，その対偶により,「有界でなければ収束しない」．したがって，上で作った点列 $(x_n)_n$ のどんな部分列も収束列ではない．これは，K の点列コンパクト性に反する（背理法による証明終）
（２）K が閉集合であることの証明.
　閉集合の定義（点列による）を思い出すと，K に含まれる任意の収束点列 $(x_n)_n$ を考え，その極限 a が K に属することを示せばよい.

> （注意）ここで，$(x_n)_n$ は全体集合 X における収束列だから，その極限 a が X の中に存在することは，仮定されている．ここでの論点は，この a が実は K に含まれているということである.

　K の点列コンパクト性により，$(x_n)_n$ は K の要素 b に収束する部分列をもつ．しかし，もともと $(x_n)_n$ は a に収束していたのだから，$a=b$ である．したがって，$a \in K$ である.

定理１の証明終

定理２：有限次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^m$ では「有界閉 $\Longrightarrow$ 点列コンパクト」.

証明：$\mathbf{R}^m$ における有界閉集合 K を考える.
　K が点列コンパクトであることを示したいのだから，点列コンパクトの定義に従って，K に含まれる点列 $(x_n)_n$ を任意にとってくる.

　　　点列 $(x_n)_n$ が K の点に収束する部分列をもつ　　（＊）

ことを示したい.
　仮定の「有界閉」を次のように使う．まず，K は閉集合だから，もし，部分列が収束するならば，当然，その極限は K の点になっている．つまり,「K の点に収束する」という部分は自動的に満たされる．だから,（＊）は

　　　点列 $(x_n)_n$ が収束部分列をもつ

と同じことになる．次に，K の有界性と $(x_n)_n$ が K に含まれていることにより，$(x_n)_n$ は有界点列である．したがって，次の命題 BW_m を示せれば,（＊）が示されたことになる.

> 命題 BW_m:　$\mathbf{R}^m$ の任意の有界点列は収束部分列をもつ.

以下，この命題を次元 m に関する帰納法で証明する.
　命題 BW_1 は Bolzano–Weierstrass の定理に他ならない.

命題 BW_m の帰納法による証明は以下のようにする．$\mathbf{R}^m$ における有界点列 $(x_n)_n$ を任意にとって固定する．

各 n に対して，x_n は m 次元ベクトルであるが，m に関する帰納法を念頭において，これを $x_n = (y_n, z_n)$ と書く．ここで，y_n は第１成分，z_n は第２〜m 成分を並べた $m-1$ 次元ベクトルである．

点列 $(z_n)_n$ は，$\mathbf{R}^{m-1}$ における有界点列である（$\|z_n\|_2 \le \|x_n\|_2$ による）．帰納法の仮定より，命題 BW_{m-1} が成り立つから，点列 $(z_n)_n$ は収束部分列をもつ．これを $(z_{n(k)})_k$ と書くことし，その極限値を $b = \lim_{k\to\infty} z_{n(k)}$ とする．

上のようにして添え字の部分列 $(n(k) \mid k = 1, 2, \ldots)$ が決まったが，それに対応する第１成分の列 $(y_{n(k)})_k$ は，$\mathbf{R}$ における有界点列であるから，命題 BW_1 により，収束部分列 $(y_{n(k(l))})_l$ をもつ．極限値を $a = \lim_{l\to\infty} y_{n(k(l))}$ とする．

記号が面倒になったので，$\hat{y}_l = y_{n(k(l))}$ と書くことにする．同様に，$\hat{x}_l = x_{n(k(l))}$, $\hat{z}_l = z_{n(k(l))}$ と書き直す．すると，$\lim_{l\to\infty} \hat{y}_l = a$, $\lim_{l\to\infty} \hat{z}_l = b$であるから，$\lim_{l\to\infty} \hat{x}_l = (a, b)$ である．これで，有界点列 $(x_n)_n$ が収束部分列 $(\hat{x}_l)_l$ をもつことが示されたことになる．つまり，命題 BW_m の証明ができたことになる．

定理２の証明終

(注意) 無限次元空間では，有界閉集合でコンパクトでないものが存在する．
$\longrightarrow$ 資料：**有界閉集合でコンパクトでない例（無限次元空間で）**を参照.

以下　Advanced Topic

◎第４段階：開被覆によるコンパクト性の定義

(X, d): 距離空間,　　K: X の部分集合

定義（コンパクト）：K がコンパクト $\iff$ K の任意の開被覆が有限部分被覆をもつ．

言葉の説明：λ を添え字とする開集合の集まり $\{U_\lambda \mid \lambda \in L\}$ が K の 開被覆 とは，その和集合が K を含むこと（式で書けば，$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in L} U_\lambda \supseteq K$ ）をいう．開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda \in L\}$ が 有限部分被覆をもつ とは，その中から，有限個の開集合をうまく選ぶと，それらだけで K を覆うことができること（つまり，ある整数 m と $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in L$ が存在して $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i} \supseteq K$）をいう．

定理３：任意の距離空間において「点列コンパクト $\iff$ コンパクト」．
（$\Longrightarrow$ を Heine–Borel の定理という．$\Longleftarrow$ は，比較的簡単に証明できる.）

（注意）開被覆による定義を導入する理由を簡単に述べる．定理３のように，

距離空間では，点列による定義と開被覆による定義は同値

だから，何も，開被覆を持ち出さなくてよい気がする．しかし，収束概念を考える場として，

距離空間　　$\longrightarrow$　位相空間

という一般化の方向がある．このとき，収束を表現する主役は

点列　　　　$\longrightarrow$　開集合

のように移行する．これに整合する定義の変更が，

点列コンパクト $\longrightarrow$ （開被覆による）コンパクト

ということである．

以上 (2010-12-07)