縮小写像の原理

◎基本形

$X \subseteq \mathbf{R}^n$ として関数（写像）$F : X \to X$ を考える．X のノルムを $\|\cdot\|$ とする．

定義 1（縮小写像）：$F : X \to X$ が <u>縮小写像</u> $\iff$ ある μ $(0 \le \mu < 1)$ が存在して

$$\|F(x) - F(y)\| \le \mu \|x - y\| \qquad (x, y \in X). \tag{1}$$

・縮小写像は連続である（証明は容易）．

定理 1（縮小写像の原理）：$X \subseteq \mathbf{R}^n$ が閉集合，$F : X \to X$ が縮小写像とする．

(i) F は X の中に唯一の不動点 ($\overline{x} = F(\overline{x})$ を満たす $\overline{x}$) をもつ．

(ii) 任意の $x \in X$ に対して，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} F^k(x) = \overline{x}$.

ただし $F^k(x)$ は $F(F(F(F(\cdots F(x)\cdots))))$ のように k 回適用したもの．

証明： (1) $x_k = F^k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ と定義すると，$x_0 = x$ として，

$\|x_k - x_{k+1}\| = \|F(x_{k-1}) - F(x_k)\| \le \mu \|x_{k-1} - x_k\|$.

したがって $\|x_k - x_{k+1}\| \le \mu^k \|x_0 - x_1\|$ であり，$0 < k < l$ のとき，

$$\begin{aligned}\|x_k - x_l\| &\le \|x_k - x_{k+1}\| + \|x_{k+1} - x_{k+2}\| + \cdots + \|x_{l-1} - x_l\| \\ &\le (\mu^k + \mu^{k+1} + \cdots + \mu^{l-1})\|x_0 - x_1\| = \frac{\mu^k - \mu^l}{1 - \mu}\|x_0 - x_1\|.\end{aligned}$$

最後の項は $k, l \to \infty$ で 0 に収束するから，点列 $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ は Cauchy 列.

(2) $\mathbf{R}^n$ の完備性により，ある $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$ が存在して $x_k \to \overline{x}$.

(3) (x_k) は X の点列で，X は閉集合だから，その極限 $\overline{x} \in X$.

(4) $x_{k+1} = F(x_k)$ において $k \to \infty$ として，F の連続性を使うと，$\overline{x} = F(\overline{x})$.

(5) $\overline{y}$ も不動点とすると，$\|\overline{x} - \overline{y}\| = \|F(\overline{x}) - F(\overline{y})\| \le \mu \|\overline{x} - \overline{y}\|$.

ここで $0 \le \mu < 1$ だから，$\overline{x} = \overline{y}$. (証終)

・縮小写像の原理は，<u>完備な</u> 距離空間 (X, d) と関数 $F : X \to X$ に一般化できる．

◎パラメータを含む場合への拡張

$X \subseteq \mathbf{R}^n$ (閉集合), $U \subseteq \mathbf{R}^m$ として関数 $F : X \times U \to X$ を考える．

縮小写像の条件 (1) を拡張した条件：ある μ $(0 \le \mu < 1)$ に対して

$$\|F(x, \alpha) - F(y, \alpha)\| \le \mu \|x - y\| \qquad (x, y \in X, \alpha \in U) \tag{2}$$

を考える．この条件が成り立つとき，縮小写像の原理により，各 $\alpha \in U$ に対して，$\overline{x}(\alpha) = F(\overline{x}(\alpha), \alpha)$ を満たす点 $\overline{x}(\alpha) \in X$ が一意に存在する．

定理 2：X は閉集合とし，(2) を仮定する．

(i) F が α に関して連続ならば，$\overline{x}(\alpha)$ は α の連続関数である．

(ii) F が (x, α) に関して連続微分可能 (C^1 級) ならば，$\overline{x}(\alpha)$ は α に関して C^1 級である．

証明 (i)

$$
\begin{aligned}
&\|\overline{x}(\alpha)-\overline{x}(\beta)\| = \|F(\overline{x}(\alpha),\alpha)-F(\overline{x}(\beta),\beta)\| \\
&\le \|F(\overline{x}(\alpha),\alpha)-F(\overline{x}(\beta),\alpha)\| + \|F(\overline{x}(\beta),\alpha)-F(\overline{x}(\beta),\beta)\| \\
&\le \mu\|\overline{x}(\alpha)-\overline{x}(\beta)\| + \|F(\overline{x}(\beta),\alpha)-F(\overline{x}(\beta),\beta)\|
\end{aligned}
$$

により，

$$
\|\overline{x}(\alpha)-\overline{x}(\beta)\| \le \frac{1}{1-\mu}\|F(\overline{x}(\beta),\alpha)-F(\overline{x}(\beta),\beta)\|.
$$

ここで $\alpha\to\beta$ とすると，$\overline{x}(\cdot)$ が β で連続であることが導かれる．
(ii) $\alpha,\beta\in U$ として

$$
A=\frac{\partial F}{\partial x}(\overline{x}(\beta),\beta), \qquad B=\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\overline{x}(\beta),\beta)
$$

とおく (A は $n\times n$ 行列，B は $n\times m$ 行列)．不動点の定義と F の微分可能性により

$$
\begin{aligned}
\overline{x}(\alpha)-\overline{x}(\beta) &= F(\overline{x}(\alpha),\alpha)-F(\overline{x}(\beta),\beta) \\
&= A(\overline{x}(\alpha)-\overline{x}(\beta))+B(\alpha-\beta)+\mathrm{o}(\|\overline{x}(\alpha)-\overline{x}(\beta)\|+\|\alpha-\beta\|)
\end{aligned}
$$

である．条件 (2) より $\|A\|\le\mu<1$ だから $I-A$ は正則である．したがって，上式から

$$
\overline{x}(\alpha)-\overline{x}(\beta)=(I-A)^{-1}B(\alpha-\beta)+\mathrm{o}(\|\overline{x}(\alpha)-\overline{x}(\beta)\|+\|\alpha-\beta\|)
$$

となり，

$$
\overline{x}(\alpha)-\overline{x}(\beta)=(I-A)^{-1}B(\alpha-\beta)+\mathrm{o}(\|\alpha-\beta\|)
$$

である．ゆえに，$\overline{x}(\cdot)$ は微分可能であり，

$$
\frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}\alpha}(\beta)=(I-A)^{-1}B
$$

である．変数を β から α に書き換えると

$$
\frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha)=\left(I-\frac{\partial F}{\partial x}(\overline{x}(\alpha),\alpha)\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\overline{x}(\alpha),\alpha)
$$

となる．ここで F が C^1 級だから，$\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ は連続であり，(i) により $\overline{x}(\alpha)$ も連続であるから，上式の右辺は α に関する連続関数である．したがって，$\overline{x}(\alpha)$ は C^1 級である．

以上 (2012-01-10)