距離空間における収束

一般の距離空間 (X, d) を考える．　［基本的な例：$X = \mathbf{R}$, $d(x, y) = |x - y|$］
点列 $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ の各項 a_n は X の要素とする．

◎点列の収束

定義（収束）：点列 $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が $a \in X$ に収束する（記号: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \to a$） $\iff$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N}:\ n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon. \tag{1}$$

定義（収束列）：点列 $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が収束列 $\iff$

$$\exists a \in X,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N}:\ n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon. \tag{2}$$

◎ Cauchy 列

定義（Cauchy 列）：点列 $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が Cauchy 列 $\iff$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall m, n \in \mathbf{N}:\ m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon. \tag{3}$$

命題１：収束列は Cauchy 列である．

証明：[$X = \mathbf{R}$ の場合の証明において，絶対値 $|x - y|$ を $d(x, y)$ に置き換えればよい]
$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が収束列であるとし，$a_n \to a$ とする．Cauchy 列の定義 (3) にあわせるために，任意の $\varepsilon > 0$ を固定する．すると，収束の定義 (1) から，この ε に対して，ある $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して，$n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon/2$ が成り立つ．記号を変えて，n を m と書いてもいいから，$m \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a) < \varepsilon/2$ も成り立つ．したがって，$m, n \geq n_0$ を満たす任意の m, n に対して，

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a_n, a) < \varepsilon$$

が成り立つ．これは (3) にあっているので，$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は Cauchy 列である．（証終）

・一般には，命題１の逆は成り立たない（Cauchy 列でも収束するとは限らない）．命題１の逆が成り立つような距離空間は「良い空間」であると考えて，次の概念を定義する．

定義（完備な距離空間）：(X, d) における任意の Cauchy 列が収束するとき，(X, d) は完備 (complete) であるという．

→資料「距離空間の完備性」参照．

以上 (2010-12-07)