極値としての固有値

まず，対称行列 A の固有値はすべて実数であることに注意する．

定理 1 対称行列 A の最大固有値を λ_1 とするとき，

$$\lambda_1 = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}}. \tag{1}$$

なお，$R(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}}$ を**レイリー商** (Rayleigh quotient) という．

証明：n 次対称行列 A の固有値を $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ とし，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n$ を正規直交系になるようにとる．$\boldsymbol{x} = c_1 \boldsymbol{z}_1 + \cdots + c_n \boldsymbol{z}_n$ のとき

$$R(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i {c_i}^2}{\sum_{i=1}^n {c_i}^2} = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$$

である．ここで，$w_i = {c_i}^2/({c_1}^2 + \cdots + {c_n}^2) \geq 0$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ であるから，$R(\boldsymbol{x})$ の最大値は $w_1 = 1$, $w_i = 0$ $(i = 2, \ldots, n)$ で達成され，$\max R(\boldsymbol{x}) = \lambda_1$． 証明終

問題 1　対称行列 A の最小固有値 μ_1 が

$$\mu_1 = \min_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}} \tag{2}$$

と表されることを証明せよ．[ヒント：$-\mu_1$ は $-A$ の最大固有値である]

問題 2　A, B を対称行列とし，B は正定値とする．(A, B) に関する固有値 ($A\boldsymbol{x} = \lambda B \boldsymbol{x}$ を満たす λ) の最大値を $\lambda_1(A, B)$，最小値を $\mu_1(A, B)$ とするとき，次を示せ：

$$\lambda_1(A, B) = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top B \boldsymbol{x}}, \qquad \mu_1(A, B) = \min_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top B \boldsymbol{x}}. \tag{3}$$

以下　Advanced Topic

定理 2 (Courant–Fischer の最大・最小定理) n 次対称行列 A の固有値を $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ とする（すなわち，大きい方から r 番目の固有値を λ_r とする）とき，

$$\lambda_r = \max_{S : \dim S = r} \ \min_{\boldsymbol{x} \in S \setminus \{\boldsymbol{0}\}} \frac{\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}} = \min_{S : \dim S = n - r + 1} \ \max_{\boldsymbol{x} \in S \setminus \{\boldsymbol{0}\}} \frac{\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}} \tag{4}$$

が成り立つ．ただし，S はそれぞれ指定された次元の任意の部分空間を動く．

参考文献　杉原正顯, 室田一雄: 線形計算の数理, 岩波書店, 2009 (p.298, 問題 7.10)

以上 (2010-12-06)