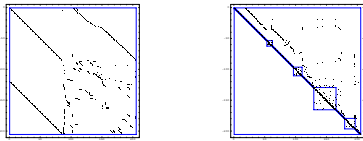


# 工学の線形代数

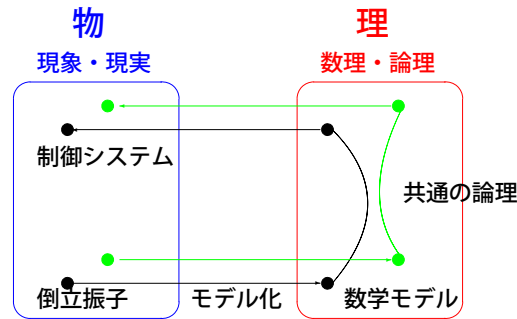
室田 一雄

数理情報学専攻・計数工学科



<http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~murota>

## 現象と数理



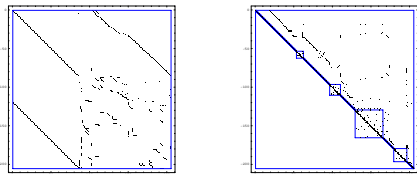
## 工学的線形代数：3つの着目点

1. 行列はどのように生じるか？  
システムの記述, 微分方程式の離散化
2. どのような行列が生じるか？  
大規模, 疎行列
3. 何をどのように計算するか？  
ランク, 固有値; 数値計算法, Gauss消去法

## 大規模・疎行列

化学工学の例題

変数と方程式の数 = 205



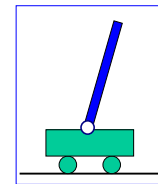
行列

DM分解

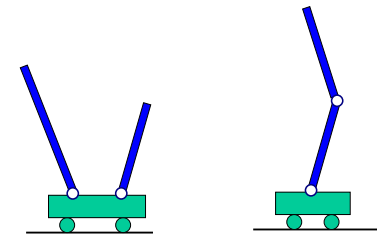
離散数学

最適化

## 倒立振り子



## 並列と直列の倒立振り子



## ダイナミカル・システムの数理

数学モデル  $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$



動的挙動

微分方程式

安定性

行列の固有値

可制御性

行列のランク

システム構造

グラフ表現

## 安定性と固有値

## システムの安定性 — 行列の固有値

微分方程式:  $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$  (入力  $u$  のない場合)

解:  $x(t) = e^{At}x(0) \left( = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k x(0) \right)$

システムが安定:

任意の  $x(0)$  に対し,  $t \rightarrow \infty$  で  $x(t) \rightarrow 0$

$\iff$  行列  $A$  のすべての固有値の実部  $< 0$

線形代数: 固有ベクトルによる対角化 ( $\rightarrow$  Jordan標準形)

$D = T^{-1}AT$ ,  $z = T^{-1}x$  により  $\dot{z}_i = d_i z_i$

安定性  $\iff d_i < 0$  ( $\forall i$ )

## 倒立振子の安定性

2次系, 漸近安定

安定性  $\iff A$  の固有値の実部  $< 0$

台車固定, 変数  $(\theta, \dot{\theta})$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{J} & -\frac{D}{J} \end{bmatrix}$$

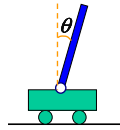
$D$ : 摩擦係数  $J = \frac{4}{3}ml^2$ ; 慣性モーメント

固有値は  $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A = -\frac{D}{J} < 0$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A = -\frac{mgl}{J} < 0$$

$\implies \lambda_1, \lambda_2$  は 正 と 負 (不安定)

次元解析:  $A$  の固有値の 物理次元 は 1/(時間)



10

## 振子の安定性の比較

2次系, 漸近安定

台車固定, 変数  $(\theta, \dot{\theta})$



倒立振子

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\frac{mgl}{J} & -\frac{D}{J} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{D}{J} < 0$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\frac{mgl}{J} < 0$$

正 と 負 (不安定)



普通の振子

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{J} & -\frac{D}{J} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{D}{J} < 0$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = +\frac{mgl}{J} > 0$$

負 と 負 (安定)

11

## 可制御性とランク

12

## システムの可制御性 — 行列のランク

微分方程式:  $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$  ( $x$ :  $n$ 次元)

解:  $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$

可制御: 任意の  $x(0)$  に対し 有限時間で  $x(t) = 0$

$$\iff \text{rank}[B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B] = n$$

説明  $x(t) = 0 \iff$

$$-x(0) = \int_0^t e^{-As}Bu(s)ds = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-As)^k Bu(s)ds = \sum_{k=0}^{\infty} (A^k B)u_k$$

$$\left( u_k = \int_0^t \frac{1}{k!} (-s)^k u(s)ds \right)$$

可制御  $\implies \text{span}[B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B|A^n B|\dots] = \mathbb{R}^n$

$$\iff \text{span}[B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B] = \mathbb{R}^n$$

13

## 倒立振子の可制御性

可制御  $\iff \text{rank}[B|AB|A^2B|A^3B] = 4$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mgl}{N} & -\frac{4Dx}{3N} & \frac{D}{N} \\ 0 & \frac{(M+m)g}{N} & \frac{Dx}{N} & -\frac{(M+m)D}{Nml} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4l}{3N} \\ -\frac{1}{N} \end{bmatrix}$$

$$(N = (4M + m)l/3)$$

計算 (式/数値として) してみると

$$\text{rank}[B|AB|A^2B|A^3B] = 4 \implies \text{可制御}$$

ランクの計算法? Gauss消去法? 数値的安定性?

数値線形代数

14

## 可制御性 [2] — 固有値とランク

システム ( $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ ) が 可制御

$$\iff \text{rank}[B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B] = n$$

$$\iff \text{すべての複素数 } \lambda \text{ に対し } \text{rank}[A - \lambda I | B] = n$$

★ $\lambda$  としては  $A$  の固有値 だけ調べればよい

(システムの固有モード)

15

## 倒立振子の可制御性 [2]

可制御  $\iff \forall \lambda \in \mathbb{C}: \text{rank}[A - \lambda I | B] = 4$

$$[A - \lambda I | B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{mgl}{N} & -\frac{4Dx}{3N} - \lambda & \frac{D}{N} & \frac{4l}{3N} \\ 0 & \frac{(M+m)g}{N} & \frac{Dx}{N} & -\frac{(M+m)D}{Nml} - \lambda & -\frac{1}{N} \end{array} \right]$$

固有値  $\lambda = 0$  を調べてみよう

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{mgl}{N} & -\frac{4Dx}{3N} & \frac{D}{N} & \frac{4l}{3N} \\ 0 & \frac{(M+m)g}{N} & \frac{Dx}{N} & -\frac{(M+m)D}{Nml} & -\frac{1}{N} \end{array} \right]$$

$$\implies \text{rank}[A|B] = 4$$

16

## 並列 倒立振子の記述

$$\dot{x} = Ax + Bu \iff \hat{F}\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

$$(A = \hat{F}^{-1}\hat{A}, B = \hat{F}^{-1}\hat{B})$$

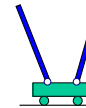
変数  $(x, \dot{x}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2)$

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M+2m & 0 & ml & 0 & ml \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ml & 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & ml & 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Dx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mgl & -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & mgl & -D \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$m = m_1, m_2; \quad l = l_1, l_2; \quad D = D_1, D_2; \quad J = J_1, J_2$$

17



## 並列 倒立振子の可制御性

可制御  $\iff \forall \lambda: \text{rank}[A - \lambda I | B] = n$

$$[A - \lambda I | B] = \hat{F}^{-1}[\hat{A} - \lambda \hat{F} | \hat{B}]$$

$$\iff \forall \lambda: \text{rank}[\hat{A} - \lambda \hat{F} | \hat{B}] = n$$

一般には: 可制御

同一振子: 非可制御

対称性による構造的退化

$$\left[ \begin{array}{cccc|ccc} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Dx - \lambda(M+2m) & 0 & -\lambda ml & 0 & -\lambda ml & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda ml & mgl & -D - \lambda J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda ml & 0 & 0 & mgl & -D - \lambda J & 0 \end{array} \right]$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ mgl & -D - \lambda J \end{bmatrix} = 0 \implies \text{rank}[\hat{A} - \lambda \hat{F} | \hat{B}] = 5$$

18

## 数値 と 構造

19

## システム構造 の 表現法

数学モデル  $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mgl}{N} & -\frac{4Dx}{3N} & \frac{D}{N} \\ 0 & \frac{(M+m)g}{N} & \frac{D_x}{N} & -\frac{(M+m)D}{Nm} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4l}{3N} \\ -\frac{1}{N} \end{bmatrix}$$

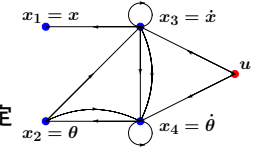
数値情報 vs 構造情報

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X \\ X \end{bmatrix}$$

20

## グラフ表現 と 構造可制御性

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X \\ X \end{bmatrix}$$

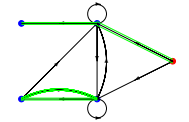


構造情報による可制御性判定

⇒ グラフ上の条件

(1)  $\forall \lambda \neq 0: \text{rank}[A - \lambda I \mid B] = n$

⇔  $u$ から各 $x_i$ へパスが存在



(2)  $\lambda = 0: \text{rank}[A \mid B] = n$

⇔ カクタスが存在

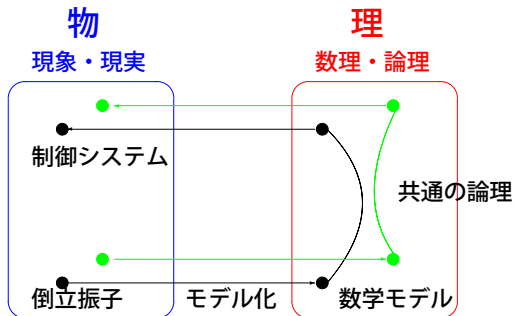
(ある形のグラフ)

グラフ理論

21

## 現象 と 数理

(再掲)



22

## 共通の論理

線形代数

数値線形代数

グラフ理論

対称性による構造的退化 (群論)

離散数学

最適化

END

23

## システムの動的挙動 — 微分方程式

数学モデル  $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$

(1) 入力  $u$  のない場合:  $\frac{d}{dt}x = Ax$   
 $x(t) = e^{At}x(0) \quad \left( = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k x(0) \right)$

(2) 入力  $u$  のある場合:  $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$   
 $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds$

8

## 倒立振子の方程式

位置エネルギー:  $U = mgl(1 + \cos \theta)$

運動エネルギー:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2l \cos \theta \dot{x}\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

Rayleighの散逸関数:  $\mathcal{D} = \frac{1}{2}D_x\dot{x}^2 + \frac{1}{2}D\dot{\theta}^2$

Lagrangeの方程式 (運動方程式):

$$(ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta) + (M + m)\ddot{x} + D_x\dot{x} = u$$

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - mgl \sin \theta + D\dot{\theta} = 0$$

線形化 ( $\theta = 0$  周り):  $ml\ddot{\theta} + (M + m)\ddot{x} + D_x\dot{x} = u$   
 $\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} - mgl\theta + D\dot{\theta} = 0$

15

## 並列 倒立振子の方程式

位置エネルギー:

$$U = \sum_{i=1}^2 m_i g l_i (1 + \cos \theta_i)$$

運動エネルギー:

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{6} m_i l_i^2 \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} m_i (\dot{x}^2 + 2l_i \cos \theta_i \dot{x} \dot{\theta}_i + l_i^2 \dot{\theta}_i^2) \right) + \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

Rayleighの散逸関数:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} D_x \dot{x}^2 + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} D_i \dot{\theta}_i^2$$

Lagrangeの方程式 (運動方程式):

$$\sum_{i=1}^2 (m_i l_i \ddot{\theta}_i \cos \theta_i - m_i l_i \dot{\theta}_i^2 \sin \theta_i) + (M + m_1 + m_2) \ddot{x} + D_x \dot{x} = u$$

$$\frac{4}{3} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 \ddot{x} \cos \theta_1 - m_1 g l_1 \sin \theta_1 + D_1 \dot{\theta}_1 = 0$$

$$\frac{4}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 \ddot{x} \cos \theta_2 - m_2 g l_2 \sin \theta_2 + D_2 \dot{\theta}_2 = 0$$

19

## 並列 倒立振子の方程式 [2]

線形化 ( $\theta_1 = \theta_2 = 0$  周り):

$$m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + (M + m_1 + m_2) \ddot{x} + D_x \dot{x} = u$$

$$\frac{4}{3} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 \ddot{x} - m_1 g l_1 \theta_1 + D_1 \dot{\theta}_1 = 0$$

$$\frac{4}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 \ddot{x} - m_2 g l_2 \theta_2 + D_2 \dot{\theta}_2 = 0$$

状態変数:  $x = (x, \dot{x}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2)$

$-\lambda$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$0$	$-D_x - \lambda(M + 2m)$	$0$	$-\lambda ml$	$0$	$-\lambda ml$	$1$
$0$	$0$	$-\lambda$	$1$	$0$	$0$	$0$
$0$	$-\lambda ml$	$mgl$	$-D - \lambda J$	$0$	$0$	$0$
$0$	$0$	$0$	$0$	$-\lambda$	$1$	$0$
$0$	$-\lambda ml$	$0$	$0$	$mgl$	$-D - \lambda J$	$0$

20