基礎数理　室田

線形独立性とマトロイド (Advanced Topic)

線形独立性の本質は何か？

ベクトル空間における線形独立集合のもつ組合せ的な性質は，マトロイド (matroid) と呼ばれる抽象的な離散構造として表現される．マトロイドは単純な公理によって定義されているにもかかわらず，豊かな構造をもっており，基本的な離散構造と考えられている．とくに，離散最適化の分野においては，マトロイド構造と高速アルゴリズムは不可分の関係にある．

以下，マトロイドの概念を具体的な行列に即して説明する．行列が一つ与えられたとして，その列番号の集合を V とする．例えば，

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ A = & \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [a_1, \cdots, a_5] \end{array}$$

に対して，$V = \{1, \cdots, 5\}$ である．

列ベクトルの線形独立性に着目して，V の部分集合 X を独立集合と従属集合に区別する．すなわち，$\{a_j \mid j \in X\}$ が線形独立，従属に応じて X を独立集合，従属集合と呼ぶ．独立集合の全体を $\mathcal{I}$ と書く．独立集合の部分集合は独立集合であるから，独立集合のうち包含関係に関して極大なもの（極大独立集合）に着目して基と呼び，基の全体を $\mathcal{B}$ と書く．同様に，従属集合を含む集合は従属集合であるから，極小従属集合に着目してサーキットと呼び，サーキットの全体を $\mathcal{C}$ と書く．

上の例では，$\mathcal{B} = \{\{1,2,3\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,4,5\},\{3,4,5\}\}$，$\mathcal{C} = \{\{1,2,4\},\{2,3,5\},\{1,3,4,5\}\}$ である．

独立集合族 $\mathcal{I}$ は次の組合せ的な性質を持っている:

(I1) 空集合は $\mathcal{I}$ に含まれる，

(I2) $Y \in \mathcal{I}$ かつ $X \subseteq Y$ ならば $X \in \mathcal{I}$,

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| < |Y|$ ならば $X \cup \{y\} \in \mathcal{I}$ を満たす $y \in Y \setminus X$ が存在する．

基族 $\mathcal{B}$ は,（同時）交換公理とよばれる次の性質を持っている:

(B) 任意の $B, B' \in \mathcal{B}$ と $i \in B \setminus B'$ に対して，ある $j \in B' \setminus B$ が存在して $(B \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathcal{B}$ かつ $(B' \cup \{i\}) \setminus \{j\} \in \mathcal{B}$.

サーキット族 $\mathcal{C}$ は，次の性質をもっている:

(C1) 空集合は $\mathcal{C}$ に含まれない,

(C2) $C, C' \in \mathcal{C}$ かつ $C \subseteq C'$ ならば $C = C'$,

(C3) 任意の相異なる $C, C' \in \mathcal{C}$ と任意の $i \in C \cap C'$ に対して，$C'' \subseteq (C \cup C') \setminus \{i\}$ を満たす $C'' \in \mathcal{C}$ が存在する．

列ベクトルの線形独立性は,

$$\rho(X) = \mathrm{rank}\{a_j \mid j \in X\} \quad (X \subseteq V)$$

で定義される階数関数 $\rho : 2^V \to \mathbf{Z}$ によっても表現される．階数関数には次の性質がある：

(R1) $0 \leq \rho(X) \leq |X|$,

(R2) $X \subseteq Y \implies \rho(X) \leq \rho(Y)$,

(R3) $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$.

最後の (R3) は劣モジュラ性と呼ばれる．

このように，行列を一つ決めると，列ベクトルの線形独立性の組合せ的側面を表現する $\mathcal{I}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \rho$ が定義でき，上に述べた性質 (I), (B), (C), (R) をもつ．ここで，性質 (I), (B), (C), (R) は，**もとの行列に言及することなく述べられているので，それぞれ，有限集合 V の上の集合族 $\mathcal{I}$, 集合族 $\mathcal{B}$, 集合族 $\mathcal{C}$，集合関数 ρ に関する条件として意味を成す．**これによって，行列を超えた一般化，抽象化がもたらされる．

さらに，(I) を満たす $\mathcal{I}$, (B) を満たす $\mathcal{B}$, (C) を満たす $\mathcal{C}$, (R) を満たす ρ は，離散構造としては同値であって，互いに他を一意的に定めることが知られている．

例えば，$\mathcal{B}$ が与えられたとき，$\mathcal{I} = \{I \mid I$ を含む $B \in \mathcal{B}$ が存在する $\}$ によって $\mathcal{I}$ が定まり，集合族 $\{S \mid S$ を含む $B \in \mathcal{B}$ が存在しない $\}$ の極小元の全体として $\mathcal{C}$ が定まり，$\rho(X) = \max\{|X \cap B| \mid B \in \mathcal{B}\}$ によって ρ が定まるという具合である．

この意味で，条件 (I), (B), (C), (R) は同一の離散構造の表現である．これをマトロイドと呼び，$(V,\mathcal{I})$, $(V,\mathcal{B})$, $(V,\mathcal{I},\mathcal{B},\mathcal{C},\rho)$, $(V,\mathcal{I},\rho)$ などと書き表す．また，V を台集合，$\mathcal{I}$ を独立集合族，$\mathcal{B}$ を基族，$\mathcal{C}$ をサーキット族，ρ を階数関数と呼ぶ．

マトロイド構造は，線形代数に限ったものではなく，例えば，グラフ G に対して，その極大木（の辺集合）の全体 $\mathcal{T}$ は上の条件 (B) を満たす．したがって，G の辺集合を台集合とし，$\mathcal{T}$ を基族とするマトロイドが定まる．このマトロイドにおけるサーキットは，G における単純な閉路 (サーキット) に対応している．

参考文献

室田一雄：離散凸解析の考えかた，共立出版，2007.（14.1 節 行列とマトロイド）

K. Murota: *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~murota/mybooks.html

以上 (2010-12-06)