基礎数理　室田

積分の収束

積分と極限の交換は，積分で定義される汎関数（関数の関数）の連続性の話である

定理１：有界閉区間 $[a,b]$ 上の可積分関数の列 (f_n) が関数 f に一様収束するならば

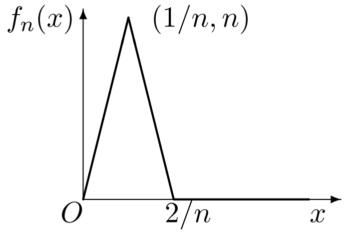
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

が成り立つ．

例１：各点収束では (1) は保証されない．例えば，$n = 2, 3, \ldots$ に対して

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & (0 \le x \le 1/n) \\ 2n - n^2 x & (1/n \le x \le 2/n), \\ 0 & (2/n \le x \le 1) \end{cases} \qquad f(x) = 0 \quad (\forall x \in [0,1])$$

と定義する．



このとき，次のことが成り立つ．

1. f_n は f に $[0,1]$ 上で各点収束するが一様収束はしない．
2. $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 1$ 　なので，これは $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$ に収束しない．

次に示す優収束定理は，(i) コンパクト一様収束, (ii) 可積分な優関数の存在，という 2 つの仮定の下で広義積分の収束性を述べている．

注意：関数 f が開区間 (a,b) 上で**広義積分可能**であるとは，開区間 (a,b) に含まれる任意の有界閉区間 $[c,d]$ 上で f が可積分であって，$\displaystyle\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ が $c \to a,\ d \to b$ のときに収束することをいう．このとき，その極限を $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ と書く．

定理２（優収束定理）：各 f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ および f が開区間 (a,b) 上で広義積分可能とし，

(i) 開区間 (a,b) に含まれる任意の有界閉区間 $[c,d]$ 上で，(f_n) は f に一様収束し，

(ii) ある広義可積分な関数 $\varphi(x)$ が存在して，任意の $x \in (a,b)$ に対して

$$|f_n(x)| \le \varphi(x) \quad (n=1,2,\ldots), \quad |f(x)| \le \varphi(x)$$

を満たすとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

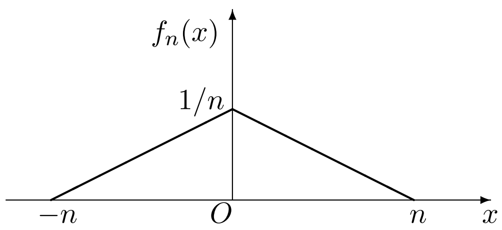
が成り立つ．

例 2 (可積分な優関数の存在が必要であることを示す例)：(i) は満たすが (ii) を満たさない状況では積分の収束性が保証されないことを示す例を挙げる．

$n=1,2,\ldots$ に対して

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}(1-\dfrac{|x|}{n}) & (|x| \le n) \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \qquad f(x)=0 \quad (\forall x \in \mathbf{R})$$

と定義する．



このとき，次のことが成り立つ．

1. f_n は f に $\mathbf{R}$ 上で一様収束する．
2. $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = 1$ なので，これは $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)\mathrm{d}x = 0$ に収束しない．
3. 可積分な優関数 φ は存在しない．

以下，可積分な優関数が存在しないことを証明する．もし，優関数 φ が存在したとすると，

$$\varphi(x) \ge \sup\{f_n(x) \mid n=1,2,3,\ldots\} \qquad (\forall x \in \mathbf{R})$$

が成り立つ．1 以上の任意の x に対して，$n/3 \le x \le n/2$ を満たす 自然数 n が存在して，

$$\varphi(x) \ge \frac{1}{n}(1-\frac{x}{n}) \ge \frac{1}{2n} \ge \frac{1}{6x}$$

である．したがって，

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\mathrm{d}x \ge \frac{1}{6}\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x = +\infty.$$

これは φ が可積分でないことを示している． 以上 (2007-09-14)