

sup と max

基本事項として, sup と max の定義と違いを説明する.

X を実数の集合とすると, $\alpha = \max X$ (α は X の最大値) とは

条件 M1: 任意の $x \in X$ に対して, $x \leq \alpha$

条件 M2: $\alpha \in X$

の両方が成り立つことを意味する.

また, $\alpha = \sup X$ (α は X の上限) とは,

条件 S1: 任意の $x \in X$ に対して, $x \leq \alpha$

条件 S2: $\beta < \alpha$ である任意の β に対して, ある $x \in X$ が存在して $\beta < x$
の両方が成り立つことをいう.

条件 S2 は, α をちょっとでも減らすと, X の上界でなくなることを述べている.

言葉で書くと,

X の最大値 (max): X の要素の中で, 最大のもの.

X の上限 (sup): X のどの数より小さくない数 (上界) の中で最小のもの.

例として,

$$X = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbf{N}\} = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots\}$$

を考えると, $\sup X = 1$ であるが, $\max X$ は存在しない.

$\alpha = 1$ は X に属していないことに注意.

なお, 一般に, $\max X$ が存在すれば, それは $\sup X$ に等しい.

X が有限集合 (X の要素の個数が有限) ならば, $\max X$ が存在する.

したがって, 有限集合 X に対しては, $\max X = \sup X$.

以上 (2007-09-14)