シルベスターの慣性則

基礎数理

実対称行列 A が与えられたとき，２次形式の平方完成に関連する変換として，正則行列 S による $B = S^\top AS$ の形を考えるのが自然である． $\boxed{\text{許容変換}}$

n 次実対称行列 A の固有値のうち，正，0，負のものの個数を $\pi(A), \zeta(A), \nu(A)$ と書くことにする（重複固有値はその重複度分だけ数える．したがって，$\pi(A)+\zeta(A)+\nu(A)=n$ である）．次の定理は **Sylvester の慣性則**[1] と呼ばれる重要な定理であり，２次形式 $x^\top Ax$ の平方完成

$$x^\top Ax = \sum_k c_k(x_1, \ldots, x_n \text{ の１次式})^2$$

において，２次形式の係数 $c_k \neq 0$ の正，負のものの個数は平方完成の作り方[2]に依らずに一定であることを示している．

定理 1 (Sylvester の慣性則) A を実対称行列，S を正則行列として，$B = S^\top AS$ とおくと，$\pi(A) = \pi(B), \zeta(A) = \zeta(B), \nu(A) = \nu(B)$ である． $\boxed{\text{不変量}}$

（証明）任意の正則行列は，基本行列の積で表わされることから，S として

(1) ある行（列）を定数 $(\neq 0)$ 倍するもの，

(2) ある２つの行（列）を入れ替えるもの，

(3) ある行（列）に別の行（列）の定数倍を加えるもの，

の３種類を考えればよい．さらに，行（列）の番号付けは本質でないことを考慮すると，

$$S_1(c) = \begin{bmatrix} c & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} & 1 & & & \\ 1 & & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad S_3(c) = \begin{bmatrix} 1 & c & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

の３つを考えればよいことになる．

(1) $S = S_1(c)$ については，まず，$c > 0$ のときを考える．パラメータ c を $1 \to c$ のように連続的に動かすとき，$S_1(1) = I$ (単位行列) だから $S_1^\top(1)AS_1(1) = A$ であり，$S_1^\top(c)AS_1(c)$ の固有値は c に対して連続的に変化する．一方，$S_1(c)$ は常に正則であるから，$\mathrm{rank}\,(S_1^\top(c)AS_1(c)) = \mathrm{rank}\,A$ である．とくに，$S_1^\top(c)AS_1(c)$ のゼロでない固有値が 0 になることはないので，この間，正・負の固有値の個数は不変である．

次に $c < 0$ のときには，パラメータ c を $-1 \to c$ のように連続的に動かす．$S_1(-1)$ は直交行列だから $S_1^\top(-1)AS_1(-1)$ の固有値は A の固有値に等しい．あとは，$c > 0$ の場合と同じ議論である．

(2) $S = S_2$ は直交行列であるから，固有値の値そのものが不変である．

(3) $S = S_3(c)$ については，パラメータ c を $0 \to c$ のように連続に動かして，(1) と同様の連続性の議論をすればよい． （証終）

[1] 英語では，Sylvester's law of inertia である.「慣性則」の代わりに「慣性法則」あるいは「慣性律」ということもある．James Joseph Sylvester: A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares, Philosophical Magazine, iv. (1852), pp. 138–142 (Also: The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester, Chelsea Publishing Company, 1973, vol. I, pp. 378–381) の中で，Sylvester 自身が "my view of the physical meaning of quantity of matter inclines me, upon the ground of analogy, to give the name of the Law of Inertia for Quadratic Forms, as expressing the fact of the existence of an invariable number inseparably attached to such forms" と記して「慣性則」と命名した．

[2] 各 k に対応する「$x_1, \ldots, x_n$ の１次式」は線形独立であるとする．

定理 2 (Sylvester の標準形) A を実対称行列とするとき，ある正則行列 S によって

$$S^\top AS = \mathrm{diag}(+1,\ldots,+1;0,\ldots,0;-1,\ldots,-1) \qquad \boxed{\text{美しい形}} \tag{1}$$

の形にできる．ここで，“+1” の個数 $=\pi(A)$, “0” の個数 $=\zeta(A)$, “−1” の個数 $=\nu(A)$.

（証明）［対称行列の固有値分解は既知とした証明］A の固有値分解より，ある直交行列 Q によって

$$Q^\top AQ = \mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_\pi;0,\ldots,0;-\beta_1,\ldots,-\beta_\nu)$$

の形にできる．ここで，$\alpha_i > 0$ $(i=1,\ldots,\pi)$, $\beta_j > 0$ $(j=1,\ldots,\nu)$ である（したがって，$\pi=\pi(A)$, $\nu=\nu(A)$ である）．これを用いて

$$S = Q\cdot \mathrm{diag}(1/\sqrt{\alpha_1},\ldots,1/\sqrt{\alpha_\pi};\ 1,\ldots,1;\ 1/\sqrt{\beta_1},\ldots,1/\sqrt{\beta_\nu})$$

とすれば (1) が成り立つ．（証終）

数値計算法への応用______**Advanced Topic**______

以下は，シルベスターの慣性則が数値計算にどう役立つかを示す解説である（[2] より）．

実対称行列 A の固有値を求めたいときに，実数 σ を任意に選んで $A-\sigma I = LDL^\top$ と $\mathrm{LDL}^\top$ 分解すれば，上の定理により

$$\pi(A-\sigma I)=\pi(D), \quad \zeta(A-\sigma I)=\zeta(D), \quad \nu(A-\sigma I)=\nu(D)$$

が成り立つ．一方，D は対角行列であるから，上式のそれぞれの右辺は対角要素の正，0, 負のものの個数に等しい．このようにして，A の固有値に関して，

σ より大きいものの個数 $(=\pi(A-\sigma I))$,
σ に等しいものの個数 $(=\zeta(A-\sigma I))$,
σ より小さいものの個数 $(=\nu(A-\sigma I))$

が計算できる．シフト量 σ をいろいろ変えれば，任意の精度で固有値の存在範囲を限定していくことができる．2 分探索によって σ を変えていくことが多いので，この解法を **2 分法** (**バイセクション法**) と呼ぶことが多い．

以上の議論は，A がどんな形の実対称行列でも成り立つのであるが，各シフト σ 毎に $A-\sigma I$ を $\mathrm{LDL}^\top$ 分解する手間を少なく抑えたいので，通常は，まずはじめに A を直交変換 Q によって 3 重対角行列 $T=Q^\top AQ$ に変換しておく．このような中間形を求めておけば，σ の任意の値に対して

$$Q^\top(A-\sigma I)Q = T-\sigma I$$

のようになるので，各 σ 毎に 3 重対角行列 $T-\sigma I$ の $\mathrm{LDL}^\top$ 分解を求めれば済むようになり，その手間は $\mathrm{O}(n)$ に軽減される．

参考書

[1] 伊理正夫：線形代数汎論，朝倉書店，2009 (第 3.5 節：双線形形式と二次形式，第 6.5 節：Sylvester 形)

[2] 杉原正顕, 室田一雄: 線形計算の数理, 岩波書店, 2009 (第 8 章　固有値問題 II：対称行列)

以上 (2011-01-30)