基礎数理　室田

各点収束と一様収束

一様収束は，何のため？

▼　連続関数の　各点収束　極限は，連続関数とは限らない

◎　連続関数の　一様収束　極限は，連続関数である

例▼：$n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x| & (|x| \leq 1/n), \\ 0 & (|x| \geq 1/n), \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0), \\ 0 & (x \neq 0), \end{cases}$$

と定義する．このとき，次のことが成り立つ．

1. f_n は f に $\mathbf{R}$ 上で各点収束する．
2. f_n は f に $\mathbf{R}$ 上で一様収束しない．
3. f_n は $\mathbf{R}$ 上の連続関数であるが，f は連続関数でない．

数学的な枠組み：

(X, d): 距離空間，　K: 距離空間 X の部分集合，　$f : K \to \mathbf{R}$　連続関数

$||f||_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$　　f の 一様ノルム

定理：連続関数の一様収束極限は，連続関数（定義域 K のコンパクト性は無関係）．

証明：まず，作戦タイム．

◇連続関数列 $(f_n)_n$ の一様収束極限を g として，点 a における g の連続性を考える．
示したいのは g の連続性であって一様連続性ではないから，a は固定しておけばよい．

◇連続性とは，$x \simeq a$ のとき，$g(x) \simeq g(a)$ となることである．g は f_n の極限だから，$f_n(x) \simeq f_n(a)$ を経由して評価すればよい．つまり，図式

$$\begin{array}{rccc} n = \infty: & g(x) & & g(a) \\ & \uparrow & & \uparrow \\ n: & f_n(x) & \longleftrightarrow & f_n(a) \end{array}$$

を念頭において，

$$\begin{aligned} |g(x) - g(a)| &\leq |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(x) - g(x)| + |f_n(a) - g(a)| \\ &\leq |f_n(x) - f_n(a)| + 2||f_n - g||_\infty \end{aligned} \tag{1}$$

の右辺の各項を不等式評価すればよさそう．

………以上の考察を踏まえて，証明をはじめる．

連続関数列 $(f_n)_n$ の一様収束極限を g とする．１点 $a \in K$ を固定する．示したいことは，a における g の連続性，すなわち，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in K: \quad d(x,a) < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon \tag{2}$$

である．$\varepsilon > 0$ を任意に固定する．

一様収束の定義により，

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists n_0,\ \forall n:\ n \geq n_0 \Rightarrow ||f_n - g||_\infty < \varepsilon' \tag{3}$$

であるから，$\varepsilon' = \varepsilon/3$ とすると，ある n (例えば $n = n_0$）が存在して，

$$||f_n - g||_\infty < \varepsilon/3. \tag{4}$$

上で固定した n について，f_n は a で連続だから，

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in K: \quad d(x,a) < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon' \tag{5}$$

である．$\varepsilon' = \varepsilon/3$ に対する $\delta > 0$ を考えると，(4) と (5) を用いて (1) の右辺を抑えると，

$$\forall x \in K: \quad d(x,a) < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon/3 + 2(\varepsilon/3) = \varepsilon$$

となる．これで (2) が示された．（証終）

以上 (2010-12-06)