

# Dulmage–Mendelsohn 分解 (DM 分解)

室田一雄 (vers. 2005-05-20)

## 1 DM 分解の意義

### 1.1 工学に現れる行列

工学に現れる行列は、線形代数の教科書にでてくる行列と比べて、

- 行列の大きさ (行や列の数) が大きい、
- 行列の要素の中にゼロのものが多い、

という特徴をもっている。何万もの素子からなる電気回路を記述するとき、行列の行数や列数も何万という大きさになるが、行列要素のほとんどはゼロである。一言でいえば、現実の行列は大規模疎行列である。「疎」というのは「過疎地帯」とかいうときの「疎」と同じで、非ゼロ要素が疎ら (まばら) である状態を意味する。「疎」の反対は「密」である。英語では、疎行列=sparse matrix, 密行列=dense matrix。ただし、疎行列と密行列の区別は数学的に厳密なものではない。

大規模疎行列の解析においては、それぞれの要素の値がいくつであるかという数値的な情報に先立って、そもそもどの要素がゼロでないかという構造的な (非数値的な) 情報の把握が重要になる。行列要素がゼロでないことは、工学システムの構成素子の間に結合関係があることを表しているからである。そして、非数値情報の解析には、普通の線形代数で中心となる幾何学的な見方よりも、むしろ組合せ論的な見方が有用である。

### 1.2 行と列の並べ換え

変数  $x$  に関する連立方程式  $Ax = b$  において、変数と方程式を上手く並べかえると解きやすい形にできることがある。例として、

$$A = \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \end{array} \begin{array}{|ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{array} \quad (1)$$

の場合を考える。四角枠の上にある  $x_1, x_2, \dots$  は、その列に対応する変数名である。また、左にある  $e_1, e_2, \dots$  は、その行の表す方程式に名前をつけたものである。右辺のベクトル  $b$  は何であっても構わない。連立方程式を解くときには、変数を順番に消去していけばよいという一般的指針があるが、変数の個数が多いとそれも大変そうである。

そこで、変数や方程式を並べる順番は自由に選べることに着目して、変数を  $x_2, x_5, x_1, x_3, x_6,$

$x_4, x_7$  の順に, 方程式を  $e_1, e_5, e_4, e_2, e_7, e_3, e_6$  の順に並べ換えてみると, 係数行列は

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & x_2 & x_5 & x_1 & x_3 & x_6 & x_4 & x_7 \\ e_1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ e_5 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ e_4 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ e_2 & & & & 2 & 5 & 1 & 0 \\ e_7 & & & & 1 & 3 & 0 & 4 \\ e_3 & & & & & & 4 & 1 \\ e_6 & & & & & & 3 & 1 \end{array} \end{array} \quad (2)$$

となる. ここで, 左下の空白の部分の要素はすべて 0 であるが, このような形をブロック三角形 (正確には上三角形) という.

この形にしてみると, 全体の方程式を解くには次のような順番であればよいことが分かる. 最初に方程式  $e_3, e_6$  に着目して

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_6 \end{bmatrix}$$

から変数  $x_4, x_7$  を定めることができる. その次には, 方程式  $e_2, e_7$  を用いて

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

から  $x_3, x_6$  が決まる. このとき, 右辺には  $x_4, x_7$  が含まれているが, これらの値は既にわかっているので問題ない. また, 方程式  $e_4$  から

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

によって  $x_1$  が決まり, 最後に, 方程式  $e_1, e_5$  から  $x_2, x_5$  が決まって, すべての変数が決まる.

このように, 行列の行と列を並べ換えてブロック三角形にできれば, 全体の方程式系が小さな方程式系の集まりに分解できることになる. 上の例においては, 7 つの変数が順序のついた 4 つのブロックに分かれて

$$\{x_2, x_5\} \leftarrow \{x_1\} \leftarrow \{x_3, x_6\} \leftarrow \{x_4, x_7\}$$

という順序になっていたが,  $x_1$  を決める方程式の右辺には  $x_3, x_6$  が含まれないので, ブロックを並べる順序を

$$\{x_2, x_5\} \leftarrow \{x_3, x_6\} \leftarrow \{x_1\} \leftarrow \{x_4, x_7\}$$

とすることもできる. したがって, ブロックの間の順序関係は, 一列に並んだ順序ではなくて,

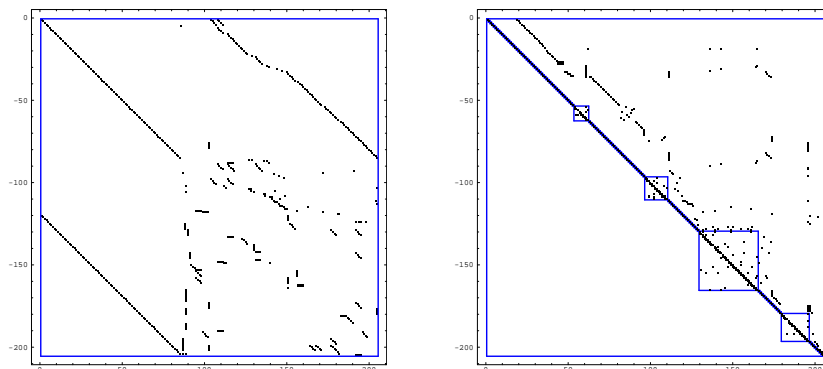
$$\begin{array}{ccc} & \{x_3, x_6\} & \\ \swarrow & & \swarrow \\ \{x_2, x_5\} & & \{x_4, x_7\} \\ \searrow & & \searrow \\ & \{x_1\} & \end{array} \quad (3)$$

で表される半順序と考えるのが適当である．ブロック三角行列 (2) の構造が，ブロックへの分割とブロック間の半順序 (3) によって決まっていることに注意．

一般の行列に対しても，行と列の並べ換えによるブロック三角化を考えることができるが，このとき最も細かいブロック三角分解が一意的に定まることが知られていて，Dulmage-Mendelsohn 分解（略して DM 分解）と呼ばれている．

DM 分解は行列のブロック三角化を与えるものであるが，その応用上の意義として，行列によって記述される物理的・工学的システムの階層構造を抽出するものであるという解釈が成り立つ．DM 分解におけるそれぞれのブロックがサブシステムに対応し，ブロック間の半順序がサブシステム間の階層構造を表現していると解釈する訳である．そうすると，DM 分解が一意的に確定するという数学的事実は，物理的にはシステムの階層構造が一意に定まることを意味していることになる．さらに都合のよいことに，DM 分解を見出す高速なアルゴリズムがあるので，DM 分解を実際のシステムの解析に利用することができる．

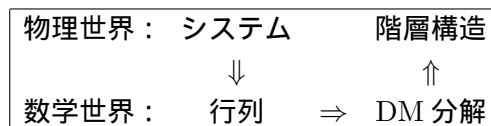
化学工学の例題に DM 分解を適用してみた例 (文献 [5] の p.196) を示す．行列は 205 次の正方行列で，左が与えられた行列，右がその DM 分解である．



行列が疎行列であることと DM 分解によって小さなブロックに分解していることに着目．

### 1.3 行列表現と分解の一意性 (Advanced Topic)

システムを記述する行列が与えられれば，DM 分解が一意に決まって，それからサブシステムとその間の階層構造が得られるというのが以上で説明した図式であった．



この図式にはちょっと気になることがある．一般に，システムの記述の仕方には自由度があるので，行列の形は一意的に決まらず，したがって，その DM 分解を通じて得られるシステムの階層構造には恣意性（任意性）が入り込んでしまう可能性がある．工学的な立場から

は、数式表現の恣意性に影響されないような物理的に意味のある階層構造を抽出したい。つまり、物理的に意味のある階層構造は数式表現によらずに定まる「不変量」になっていて欲しい（これは、座標系のとり方によらずに定まる性質が意味のある性質であると考え「幾何学の精神」である。）

この問題は、「混合行列とその正準形」によって扱うことができる。詳しいことは、文献 [2], [3], [4], [5] を参照されたい。

## 2 DM 分解の数理

### 2.1 概観

第 1.2 節の例で見たように、方程式系  $Ax = b$  の係数行列  $A$  の零/非零パターンに基づいて変数と方程式を適当に並べ換えることによって、大規模な問題をいくつかの小さな部分問題に分解できることがある。このようなブロック三角化(階層的分解)に関しては 1950 年代の終わりにグラフ論的な立場から十分研究され、最も細かい分解が一意的に確定するという基本的な事実が A. L. Dulmage と N. S. Mendelsohn によって示され、現在 Dulmage-Mendelsohn 分解(あるいは DM 分解)と呼ばれている。この分解は、1970 年代に開発されたグラフ算法(2 部グラフに対する最大マッチング算法と有向グラフに対する強連結成分分解算法)を利用して高速に求めることができる。DM 分解は、数値計算法の文献でも分解の構成算法を与えらるという形で何度も再発見されてきているが、分解の一意性や特徴付けに関して十分認識されていないことも多い。以下の内容について、より詳しくは [5] の §2.1, §2.2 を参照のこと。

### 2.2 ブロック三角化による問題分解

変数と方程式を独立に並べ換えることは、置換行列  $P_r, P_c$  を用いて、

$$\bar{A} = P_r A P_c \quad (4)$$

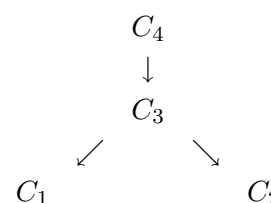
と変換することに相当する。行列  $A = (a_{ij})$  の行集合  $R$  と列集合  $C$  のそれぞれの分割  $(R_1, \dots, R_K), (C_1, \dots, C_K)$  に対して、 $R_k \times C_l$  に対応する  $A$  の部分行列を  $A_{[kl]} = A[R_k, C_l]$  と書くとき、 $A_{[kl]} = O$  ( $k > l$ ) が成り立つならば、適当な置換  $P_r, P_c$  によって  $\bar{A} = P_r A P_c$  はブロック上三角行列にできる。このとき、 $\mathbf{b}_{[k]} = (b_i \mid i \in R_k)$ 、 $\mathbf{x}_{[l]} = (x_j \mid j \in C_l)$  とおくと、方程式  $Ax = b$  を解くことは、 $K$  個の部分問題

$$A_{[kk]} \mathbf{x}_{[k]} = \tilde{\mathbf{b}}_{[k]}, \quad \text{ただし} \quad \tilde{\mathbf{b}}_{[k]} = \mathbf{b}_{[k]} - \sum_{l>k} A_{[kl]} \mathbf{x}_{[l]} \quad (5)$$

を  $k = K, K-1, \dots, 1$  の順に解くことに帰着される。ただし、各部分問題が一意的に解けるためには、 $A_{[kk]}$  ( $k = 1, \dots, K$ ) が正則であることが必要(かつ十分)である。

ブロック上三角行列  $\bar{A}$  の対角ブロックは、その添字によって順序付けられているが、より本質的な順序関係は、右上非対角ブロックの零/非零パターンによって定義される半順序である。例えば、次の行列  $\bar{A}$  において、\* が非零非対角ブロックを表すとするとき、ブロック

間の半順序は右のようになる (このような形に半順序を表す図式を Hasse 図と呼ぶ) .

$$\bar{A} = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \bullet & & * & * \\ & \bullet & * & \\ & & \bullet & * \\ & & & \bullet \end{pmatrix} \end{matrix}$$


ここで,  $C_1$  と  $C_2$  が順序関係をもたないのは,  $\bar{A}[R_1, C_2] = O$  であることに対応しており, (5) において  $C_1$  を未知数とする部分問題と  $C_2$  を未知数とする部分問題が並列に解けることを表している. このように, ブロック間の半順序は並列計算可能性の数学的表現である.

以下, 正方正則とは限らない一般の行列  $A$  に対し, 行と列の並べ換え (4) によるブロック三角化を考える. 行集合  $R$  と列集合  $C$  の分割  $\{R_0; R_1, \dots, R_K; R_\infty\}, \{C_0; C_1, \dots, C_K; C_\infty\}$  ( $k \neq l$  のとき  $R_k \cap R_l = \emptyset, C_k \cap C_l = \emptyset$ ) に関して  $A$  が真ブロック三角化<sup>1</sup>されているとは, 3条件

- B1:  $|R_0| < |C_0|$  または  $|R_0| = |C_0| = 0,$   
 $|R_k| = |C_k| > 0 \quad (k = 1, \dots, K),$   
 $|R_\infty| > |C_\infty|$  または  $|R_\infty| = |C_\infty| = 0;$
- B2:  $A[R_k, C_l] = O \quad (0 \leq l < k \leq \infty);$
- B3:  $\text{rank } A[R_k, C_k] = \min(|R_k|, |C_k|) \quad (k = 0, 1, \dots, K, \infty)$

を満たすことであると定義する. 部分行列  $A[R_0, C_0], A[R_\infty, C_\infty]$  はそれぞれ水平尾 (horizontal tail), 垂直尾 (vertical tail) と呼ばれる. この部分は空でなければ非正方であって,

$$\text{rank } A = |C| - (|C_0| - |R_0|) = |R| - (|R_\infty| - |C_\infty|) \quad (6)$$

が成り立つ. したがって, この部分に方程式系の不整合性が集約されると解釈できる. 部分問題は小さい方がいいので, できるだけ細かいブロック三角化を構成することが目標である.

問題 1 ブロック三角化を利用して, 方程式系:  $2x_6 - x_7 = 2, 3x_2 = 1, -x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0, x_3 + 2x_6 = 3, 2x_7 = 1, x_1 + x_4 - x_5 = 1, 3x_7 = 2$  の構造を調べよ (解の存在, 不整合性の修正法など).

### 2.3 DM 分解の構成法

行列  $A$  の零/非零パターンは,  $V = R \cup C$  を頂点集合とし,  $E = \{(i, j) \mid a_{ij} \neq 0\}$  を辺集合とする 2 部グラフ  $G(A) = (R, C, E)$  で表現される. 例として, 式 (1) の行列  $A$  に対する 2 部グラフ  $G(A)$  を図 1 に示す.

ここでは行列の零/非零パターンに着目しているので, 非零要素の数値を無視して独立なパラメータと見なすと, 条件 B3 に現れる階数 (rank) が組合せ的な量に翻訳でき (定理 1), 真ブロック三角化が組合せ的な議論だけで構成できることになる.

<sup>1</sup>階数に関する条件 B3 を要請していることを強調するために「真 (proper)」をつける.

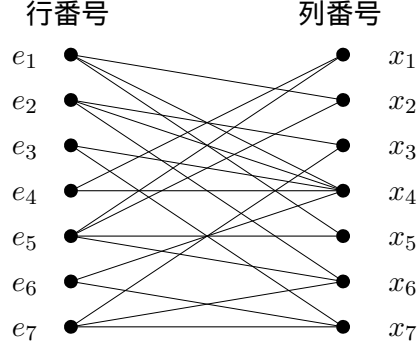


図 1: 式 (1) の行列  $A$  に対する 2 部グラフ  $G(A)$

非零要素を独立パラメタと見なすとき, 階数 (rank) はいわゆる項別階数 (term rank) に等しい:  $\text{rank} = \text{t-rank}$ . ここで, 項別階数  $\text{t-rank } A$  は<sup>2</sup>

$$\text{t-rank } A = \max\{|I| \mid \exists J : |J| = |I|; \exists \pi(1 \text{ 対 } 1) : I \rightarrow J, \forall i \in I : a_{i\pi(i)} \neq 0\}$$

で定義され, これは, 2 部グラフ  $G(A)$  における最大マッチング<sup>3</sup>の大きさに等しい. 部分行列  $A[R, J]$  の非零行の集合, 非零行の数を

$$\Gamma(J) = \{i \in R \mid \exists j \in J : a_{ij} \neq 0\} \quad (J \subseteq C), \quad (7)$$

$$\gamma(J) = |\Gamma(J)| \quad (J \subseteq C) \quad (8)$$

とおき, 関数  $p : 2^C \rightarrow \mathbf{Z}$  を

$$p(J) = \gamma(J) - |J| \quad (J \subseteq C) \quad (9)$$

と定義する. 任意の  $J \subseteq C$  に対して,

$$\text{t-rank } A \leq \text{t-rank } A[R, J] + \text{t-rank } A[R, C \setminus J] \leq \gamma(J) + |C \setminus J| = p(J) + |C| \quad (10)$$

が成り立つことは容易に分かるが, 次の定理はこの 2 つの不等号を同時に等号とする  $J$  の存在を保証している (定理 1 の証明は定理 4 の証明中に与える).

**定理 1**  $\text{t-rank } A = \min\{p(J) \mid J \subseteq C\} + |C|$ .

**問題 2** 式 (10) を証明せよ.

**問題 3** 定理 1 が最大マッチング・最小被覆定理 (Kőnig–Egerváry 定理) と同等であることを示せ.

<sup>2</sup>右辺の意味は,  $a_{i\pi(i)} \neq 0$  ( $\forall i \in I$ ) である 1 対 1 対応  $\pi : I \rightarrow J$  が存在するような正方形部分行列  $A[I, J]$  の最大サイズ.

<sup>3</sup>辺集合  $E$  の部分集合  $M$  で,  $M$  に属する辺の端点がすべて異なるものをマッチング, その中で  $|M|$  が最大のものを最大マッチングと呼ぶ.

いま, 条件 B1, B2, B3 を満たすブロック三角化があったとすると,  $X_k = \bigcup_{j=0}^k C_j$ ,  $Y_k = \bigcup_{j=0}^k R_j$  ( $0 \leq k \leq K$ ) に対して  $A[R \setminus Y_k, X_k] = O$  であって

$$\text{t-rank } A = |Y_k| + |C \setminus X_k| = \gamma(X_k) + |C \setminus X_k| = p(X_k) + |C|$$

が成り立つ. これと定理 1 により,  $p(X_k) = \min p$  であることが分かる. そこで, 関数  $p$  の最小値を与える  $C$  の部分集合全体

$$L(p) = \{J \subseteq C \mid \forall J' \subseteq C : p(J) \leq p(J')\} \quad (11)$$

に着目すると, 次の定理が成り立つ.

**定理 2** (1) 分割  $\{R_0; R_1, \dots, R_K; R_\infty\}$ ,  $\{C_0; C_1, \dots, C_K; C_\infty\}$  が真ブロック三角化を与えるならば,  $X_k = \bigcup_{j=0}^k C_j$  ( $k = 0, 1, \dots, K$ ) は  $L(p)$  の鎖 (chain) である:

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_K, \quad X_k \in L(p) \quad (0 \leq k \leq K). \quad (12)$$

(2) 逆に, 鎖 (12) において  $X_0$  が  $L(p)$  の極小元,  $X_K$  が  $L(p)$  の極大元ならば,

$$C_0 = X_0, \quad C_k = X_k \setminus X_{k-1} \quad (k = 1, \dots, K), \quad C_\infty = C \setminus X_K; \quad (13)$$

$$R_0 = \Gamma(X_0), \quad R_k = \Gamma(X_k) \setminus \Gamma(X_{k-1}) \quad (k = 1, \dots, K), \quad R_\infty = R \setminus \Gamma(X_K)$$

で定義される分割  $\{R_0; R_1, \dots, R_K; R_\infty\}$ ,  $\{C_0; C_1, \dots, C_K; C_\infty\}$  は, 非零要素を独立パラメタと見なすとき, 真ブロック三角化を与える.

(証明) (1) は上に述べたので, (2) の概略を示す.  $Y_k$  の定義により  $A[R \setminus Y_k, X_k] = O$  であり, B2 が成り立つ.  $1 \leq k \leq K$  のとき  $p(X_k) = p(X_{k-1}) (= \min p)$  だから,  $p(X_k) = \gamma(X_k) - |X_k| = |Y_k| - |X_k|$  などを代入すると,  $|R_k| = |Y_k| - |Y_{k-1}| = |X_k| - |X_{k-1}| = |C_k|$  (B1 の  $1 \leq k \leq K$  の場合) が導かれる. 定理 1 より,  $0 \leq k \leq K$  に対して  $\text{rank } A[Y_k, X_k] = \text{rank } A[R, X_k] = \text{t-rank } A[R, X_k] = \min\{p(J) \mid J \subseteq X_k\} + |X_k| = p(X_k) + |X_k| = \gamma(X_k) = |Y_k|$  と計算されるので, B3 の  $0 \leq k \leq K$  の場合が成り立つ. B1 の  $k = 0, \infty$  の場合, B3 の  $k = \infty$  の場合も同様に示される. (終)

**問題 4** 定理 2 (2) の証明において, B1 の  $k = 0, \infty$  の場合, B3 の  $k = \infty$  の場合の証明の詳細を示せ.

上の事実により,  $L(p)$  の極大鎖<sup>4</sup>から既約 (=それ以上細かく分解できない) 対角ブロックをもつ真ブロック三角化が構成できることが分かる. これを Dulmage-Mendelsohn 分解 (あるいは DM 分解) と呼ぶ. さらに,  $L(p)$  の集合族としての性質を調べることによって, DM 分解の一意性 (極大鎖の取り方に依らずに定まること), ブロック間の半順序の特徴付け, ブロック三角化の算法などが導かれる.

<sup>4</sup>鎖 (12) であって,  $\{X_k\}_{k=0}^K$  を真に含む鎖が存在しないもの.

## 2.4 DM 分解における半順序

集合族  $L(p)$  は  $C$  の部分集合全体の成す束  $2^C$  の部分束を成す．すなわち，

$$J_1 \in L(p), J_2 \in L(p) \implies J_1 \cup J_2 \in L(p), J_1 \cap J_2 \in L(p) \quad (14)$$

が成り立つ．なぜならば， $J_1, J_2$  がともに  $p$  の最小値 ( $= \alpha$ ) を与えるとするとき， $p$  の劣モジュラ性 (submodularity)

$$p(J_1 \cup J_2) + p(J_1 \cap J_2) \leq p(J_1) + p(J_2) \quad (J_1, J_2 \subseteq C) \quad (15)$$

により， $2\alpha \leq p(J_1 \cup J_2) + p(J_1 \cap J_2) \leq p(J_1) + p(J_2) = 2\alpha$  となるからである．

問題 5 式 (7) の  $\Gamma$  に対して  $\Gamma(J_1 \cup J_2) = \Gamma(J_1) \cup \Gamma(J_2)$ ,  $\Gamma(J_1 \cap J_2) \subseteq \Gamma(J_1) \cap \Gamma(J_2)$  を示すことにより， $p$  の劣モジュラ性 (15) を導け．

一般に，部分束  $L \subseteq 2^C$  は，次のようにして， $C$  の分割とブロック間の半順序  $\preceq$  を定める (例 1)． $L$  の一つの極大鎖 (12) ( $X_0 = \min L$ ,  $X_K = \max L$ ) から，(13) によって  $C$  の分割  $\{C_0; C_1, \dots, C_K; C_\infty\}$  が定まり，これは極大鎖の取り方に依らずに確定する (Jordan-Hölder の原理)．また， $1 \leq k, l \leq K$  に対し，

$$X \in L, C_l \subseteq X \implies C_k \subseteq X \quad (16)$$

が成立するときに  $C_k \preceq C_l$  と定めることにより  $\{C_1, \dots, C_K\}$  の上の半順序  $\preceq$  が定義される<sup>5</sup>．逆に，分割と半順序によって束  $L$  が定められる．すなわち，半順序集合  $(\{C_k\}_{k=1}^K, \preceq)$  において， $\{C_k\}_{k=1}^K$  の部分族  $\mathcal{I}$  で  $[C_k \preceq C_l \in \mathcal{I} \implies C_k \in \mathcal{I}]$  を満たすものをイデアルと呼ぶとき，

$$L = \{X = C_0 \cup \bigcup_{C_k \in \mathcal{I}} C_k \mid \mathcal{I} \text{ は } \preceq \text{ に関するイデアル}\} \quad (17)$$

と表される (Birkhoff の表現定理<sup>6</sup>)．

例 1  $C = \{c_1, \dots, c_7\}$  とする．図 2(a) に示した  $2^C$  の部分束  $L$  は，図 2(b) の分割と半順序に対応する．

半順序に関して次の記号を導入しておく：

$$\begin{aligned} C_k \prec C_l &\iff C_k \preceq C_l \text{ かつ } C_k \neq C_l; \\ C_k \prec C_l &\iff \begin{cases} \text{(i) } C_k \prec C_l \text{ かつ} \\ \text{(ii) } C_k \prec C_j \prec C_l \text{ となる } C_j \text{ は存在しない.} \end{cases} \end{aligned}$$

定理 3 行列  $A$  の非零要素を独立パラメタと見なすとき，

(1) DM 分解は最も細かい真ブロック三角化である．すなわち，任意の真ブロック三角化は DM 分解の集約 (ブロックの合併) として表される．

(2) DM 分解における零/非零パタンの定める半順序は，束  $L(p)$  の定める半順序  $\preceq$  に一致する．すなわち， $1 \leq k, l \leq K$  に対して，(i)  $C_k \prec C_l$  ならば  $A[R_k, C_l] \neq O$  であり，逆に (ii)  $C_k \preceq C_l$  でなければ  $A[R_k, C_l] = O$  である．

<sup>5</sup>この半順序は，行列  $A$  とは無関係に  $L$  だけから定義されている．ただし， $L = L(p)$  のときには  $A$  の零/非零パタンの定めるものに一致する (定理 3)．

<sup>6</sup>一般に，集合束の部分束は分配束であり，Birkhoff の表現定理は分配束に対して成り立つ．



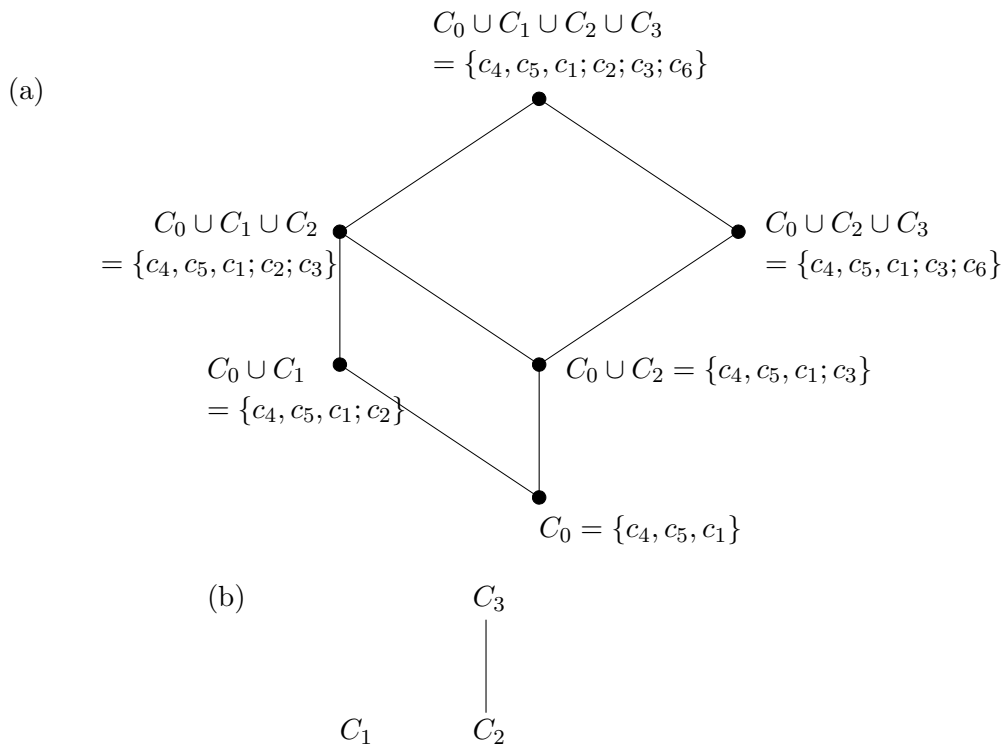


図 2: 束と分割・半順序の対応 (Birkhoff の表現定理)

例 2 行列

$$A = \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ \hline & & & & & a_{16} & a_{17} \\ \hline & a_{22} & & & & & \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{35} & & \\ \hline & & a_{43} & & & a_{46} & \\ \hline & & & & & & a_{57} \\ \hline a_{61} & & & a_{64} & a_{65} & & \\ \hline & & & & & & a_{77} \\ \hline \end{array} \quad (18)$$

の DM 分解は,

$$\bar{A} = \begin{array}{c} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_\infty \end{array} \begin{array}{c} r_6 \\ r_3 \\ r_2 \\ r_4 \\ r_1 \\ r_5 \\ r_7 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline C_0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_\infty & & \\ \hline c_4 & c_5 & c_1 & c_2 & c_3 & c_6 & c_7 \\ \hline a_{64} & a_{65} & a_{61} & & & & \\ \hline a_{35} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ \hline & & a_{22} & & & & \\ \hline & & & a_{43} & a_{46} & & \\ \hline & & & & a_{16} & a_{17} & \\ \hline & & & & & a_{57} & a_{77} \\ \hline \end{array} \quad (19)$$

で与えられる.  $K = 3$  で,  $R_0 = \{r_6, r_3\}$ ,  $R_1 = \{r_2\}$ ,  $R_2 = \{r_4\}$ ,  $R_3 = \{r_1\}$ ,  $R_\infty = \{r_5, r_7\}$ ;  $C_0 = \{c_4, c_5, c_1\}$ ,  $C_1 = \{c_2\}$ ,  $C_2 = \{c_3\}$ ,  $C_3 = \{c_6\}$ ,  $C_\infty = \{c_7\}$  であり, ブロック間の半順序は図 2 で与えられる.

問題 6 例 2 の行列  $A$  に対して,  $p(J)$  の値をすべての  $J$  に対して計算せよ. さらに, 最小値を与える  $J$  の全体  $L(p)$  を求め, これが図 2 に一致することを確かめよ.

## 2.5 DM 分解の算法

DM 分解は、2 部グラフ  $G(A) = (R, C, E)$  ( $V = R \cup C$ ) 上の最大マッチングを經由して次のようにして求められる。計算時間の大半は、最大マッチングを求める部分にかかる (注意 1)。

### DM 分解の算法

1.  $G(A)$  の最大マッチング  $M$  を一つ求め、 $M$  の端点の集合を  $\partial M (\subseteq V)$  とする。
2.  $G(A)$  において、 $E \setminus M$  の辺を  $R$  から  $C$  へ、 $M$  の辺を両方向に向き付けた有向グラフを  $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$  とする。
3.  $\tilde{G}$  において、 $R \setminus \partial M$  のある頂点から有向道で到達できる頂点の集合を  $V_\infty (\subseteq V)$  とし、 $C \setminus \partial M$  のある頂点に有向道で到達できる頂点の集合を  $V_0 (\subseteq V)$  とする。
4.  $\tilde{G}$  から  $V_0 \cup V_\infty$  の頂点 (とそれに接続する辺) を除去したグラフ  $\tilde{G}'$  の強連結成分分解  $\{V_k \mid 1 \leq k \leq K\}$  ( $\emptyset \neq V_k \subseteq V$ ) を求める。ただし  $l < k$  のとき  $V_k$  から  $V_l$  へ有向道が存在しないように番号づける。
5.  $C_k = C \cap V_k, R_k = R \cap V_k$  ( $k = 0, 1, \dots, K, \infty$ ) とする。

この算法において、マッチング  $M$  が最大であることにより、 $\tilde{G}$  には  $R \setminus \partial M$  から  $C \setminus \partial M$  に到る有向道が存在しない (そのような有向道があれば、さらに大きなマッチングが作れる)。したがって、 $V_0 \cap V_\infty = \emptyset$  である。また、 $R_k \subseteq R \cap \partial M$  ( $k = 0, 1, \dots, K$ )、 $C_k \subseteq C \cap \partial M$  ( $k = 1, \dots, K, \infty$ ) であり、 $M$  に属する辺の両端点は同じ強連結成分に属している。したがって、 $|R_k| = |C_k|$  ( $k = 1, \dots, K$ ) である。 $\tilde{G}'$  の強連結成分分解は、

$$C_k \preceq_M C_l \iff \tilde{G}' \text{ において } C_k \text{ から } C_l \text{ へ有向道がある} \quad (20)$$

によって  $\{C_k\}_{k=1}^K$  の上半順序  $\preceq_M$  を定めるが、次の定理に述べるように、これが束  $L(p)$  の表現になっているので、上の算法によって DM 分解が求められるのである。なお、この定理により、分割  $\{C_k\}_{k=1}^K$  と半順序  $\preceq_M$  は  $M$  に依らずに定まることも分かる。

**定理 4** 半順序集合  $(\{C_k\}_{k=1}^K, \preceq_M)$  は束  $L(p)$  の (Birkhoff の表現定理の意味の) 表現 (17) である。すなわち、 $L(p) = \{X = C_0 \cup \bigcup_{C_k \in \mathcal{I}} C_k \mid \mathcal{I} \text{ は } \preceq_M \text{ に関するイデアル}\}$ 。

(証明)  $X = C_0 \cup \bigcup_{C_k \in \mathcal{I}} C_k$  の形するとき、 $\Gamma(X) = R_0 \cup \bigcup_{C_k \in \mathcal{I}} R_k$  であるから、 $Y = \Gamma(X)$  とおくと、 $p(X) = |Y| - |X|$  である。一方、 $Y \subseteq R \cap \partial M$ 、 $C \setminus X \subseteq C \cap \partial M$  より、 $|M| = |Y| + |C \setminus X|$  であり、したがって  $|M| = p(X) + |C|$  が成り立つ。定理 1 の直前に述べたように、任意の  $J \subseteq C$  に対して  $|M| = \text{t-rank } A \leq p(J) + |C|$  であるから、これは、 $p(X) = \min p$  (すなわち  $X \in L(p)$ ) を示すと同時に定理 1 の証明を与えている。逆に、任意の  $X \in L(p)$  が上の形に書けることも同様に示すことができる。(終)

**注意 1** 最大マッチングや強連結成分分解を求める問題は典型的なグラフ・ネットワーク問題であり、数多くの効率の良い算法が知られている。前者については最悪の場合の計算時間が  $O(|E|\sqrt{|V|})$  のもの、後者については  $O(|E|)$  のものがある。

## 参考文献

- [1] 伊理正夫: 一般線形代数, 岩波書店, 2003.
- [2] 室田一雄: 離散システムの不変な階層構造を求めて—グラフからマトロイドへ, 応用数理, 1 (1991), pp. 230–248.
- [3] 室田一雄: 混合行列の話, 「数理工学への誘い」, 東京大学工学部計数工学科数理情報工学コース編, 日本評論社, 2002, pp. 139–149.
- [4] 室田一雄: 混合行列の正準形と階層構造, 数学セミナー, 2004年6月号, pp. 38–43.
- [5] K. Murota: *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.