

逆行列の非零パターンとDM分解

室田一雄 (vers. 2005-06-25)

定理：非零要素の代数的独立性の下では，逆行列の非零パターンは，DM分解における半順序に一致している．すなわち， $j \in C_l, i \in R_k$ とするとき，

$$\bar{A}^{-1} \text{ の } (j, i) \text{ 要素が非零} \iff (R_l, C_l) \preceq (R_k, C_k). \quad (1)$$

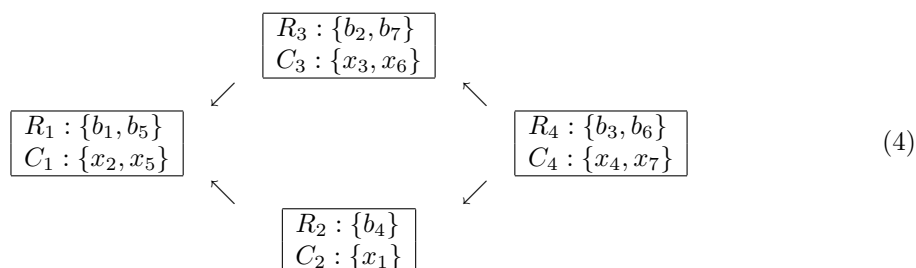
証明は，DM分解の算法と交互道の議論を合せてできるが，この資料では例を示す．

$$A = \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 5 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & b_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & b_7 \end{array} \quad (2)$$

を考える．そのDM分解は

$$\bar{A} = \begin{array}{cccc|cc|c} x_2 & x_5 & x_1 & x_3 & x_6 & x_4 & x_7 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_5 \\ & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_4 \\ & & & 2 & 5 & 1 & 0 & b_2 \\ & & & 1 & 3 & 0 & 4 & b_7 \\ & & & & & 4 & 1 & b_3 \\ & & & & & 3 & 1 & b_6 \end{array} \quad (3)$$

となり，半順序は



となる．

\bar{A}^{-1} を計算すると

$$\bar{A}^{-1} = \begin{array}{c|cccc|cc|c} & b_1 & b_5 & b_4 & b_2 & b_7 & b_3 & b_6 & \\ \hline & -1 & 2 & -6 & 2 & -4 & -44 & 60 & x_2 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -1 & 2 & 22 & -30 & x_5 \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & x_1 \\ \hline & & & & 3 & -5 & -63 & 83 & x_3 \\ \hline & & & & -1 & 2 & 25 & -33 & x_6 \\ \hline & & & & & & 1 & -1 & x_4 \\ \hline & & & & & & -3 & 4 & x_7 \end{array}$$

となるので，零/非零パターンは

$$\bar{A}^{-1} = \begin{array}{c|cccc|cc|c} & b_1 & b_5 & b_4 & b_2 & b_7 & b_3 & b_6 & \\ \hline & * & * & * & * & * & * & * & x_2 \\ \hline & * & * & * & * & * & * & * & x_5 \\ \hline & & & * & 0 & 0 & * & * & x_1 \\ \hline & & & & * & * & * & * & x_3 \\ \hline & & & & * & * & * & * & x_6 \\ \hline & & & & & & * & * & x_4 \\ \hline & & & & & & * & * & x_7 \end{array}$$

のようになる．したがって，主張 (1) が成り立つ．

$\bar{A}[R_1, C_4] = 0$ であるのに， $\bar{A}^{-1}[C_1, R_4] \neq 0$ であることに注意．これは，順序の推移律に対応している．

以上