逆行列の非零パターンとDM分解

室田一雄 (vers. 2005-06-25)

定理：非零要素の代数的独立性の下では，逆行列の非零パターンは，DM 分解における半順序に一致している．すなわち，$j \in C_l$, $i \in R_k$ とするとき，

$$\bar{A}^{-1} \text{ の } (j,i) \text{ 要素が非零} \iff (R_l, C_l) \preceq (R_k, C_k). \tag{1}$$

証明は，DM 分解の算法と交互道の議論を合せてできるが，この資料では例を示す．

$$A = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{array} \tag{2}$$

を考える．その DM 分解は

$$\bar{A} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_2 & x_5 & x_1 & x_3 & x_6 & x_4 & x_7 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc|c|cc|cc}
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
 & & & 2 & 5 & 1 & 0 \\
 & & & 1 & 3 & 0 & 4 \\ \hline
 & & & & & 4 & 1 \\
 & & & & & 3 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_5 \\ b_4 \\ b_2 \\ b_7 \\ b_3 \\ b_6 \end{array} \tag{3}$$

となり，半順序は

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\begin{array}{l} R_3 : \{b_2, b_7\} \\ C_3 : \{x_3, x_6\} \end{array}} \arrow[dl] & \\
\boxed{\begin{array}{l} R_1 : \{b_1, b_5\} \\ C_1 : \{x_2, x_5\} \end{array}} & & \boxed{\begin{array}{l} R_4 : \{b_3, b_6\} \\ C_4 : \{x_4, x_7\} \end{array}} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \boxed{\begin{array}{l} R_2 : \{b_4\} \\ C_2 : \{x_1\} \end{array}} \arrow[ul] &
\end{tikzcd} \tag{4}$$

となる．

$\bar{A}^{-1}$ を計算すると

$$
\bar{A}^{-1} = \begin{array}{|rr|r|rr|rr|l}
\multicolumn{1}{c}{b_1} & \multicolumn{1}{c}{b_5} & \multicolumn{1}{c}{b_4} & \multicolumn{1}{c}{b_2} & \multicolumn{1}{c}{b_7} & \multicolumn{1}{c}{b_3} & \multicolumn{1}{c}{b_6} & \\
\hline
-1 & 2 & -6 & 2 & -4 & -44 & 60 & x_2 \\
1 & -1 & 3 & -1 & 2 & 22 & -30 & x_5 \\
\hline
 & & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & x_1 \\
\hline
 & & & 3 & -5 & -63 & 83 & x_3 \\
 & & & -1 & 2 & 25 & -33 & x_6 \\
\hline
 & & & & & 1 & -1 & x_4 \\
 & & & & & -3 & 4 & x_7 \\
\hline
\end{array}
$$

となるので，零/非零パターンは

$$
\bar{A}^{-1} = \begin{array}{|cc|c|cc|cc|l}
\multicolumn{1}{c}{b_1} & \multicolumn{1}{c}{b_5} & \multicolumn{1}{c}{b_4} & \multicolumn{1}{c}{b_2} & \multicolumn{1}{c}{b_7} & \multicolumn{1}{c}{b_3} & \multicolumn{1}{c}{b_6} & \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & x_2 \\
* & * & * & * & * & * & * & x_5 \\
\hline
 & & * & 0 & 0 & * & * & x_1 \\
\hline
 & & & * & * & * & * & x_3 \\
 & & & * & * & * & * & x_6 \\
\hline
 & & & & & * & * & x_4 \\
 & & & & & * & * & x_7 \\
\hline
\end{array}
$$

のようになる．したがって，主張 (1) が成り立つ．

$\bar{A}[R_1, C_4] = 0$ であるのに，$\bar{A}^{-1}[C_1, R_4] \neq 0$ であることに注意．これは，順序の推移律に対応している．

以上