混合多項式行列が混合行列であることの証明の補足

室田一雄 (vers. 2005-05-14)

$K \subset F$ を体の拡大とする.

命題 1 $A(s) = Q(s) + T(s)$ が (K, F) に関する混合多項式行列
$\Longrightarrow$ $A(s) = Q(s) + T(s)$ は $(K(s), F(s))$ に関する混合行列.

これの証明の本質的ポイントは，次の命題である.

命題 2 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots\} \subseteq F$ とするとき，
$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots\}$ が $K(s)$ 上で代数的独立
$\Longrightarrow$ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, s\beta_1, s\beta_2, \ldots\}$ が K 上で代数的独立.

α, β が１つずつの場合を考えれば，話は分かる．対偶の形にして，

命題 3 $\{\alpha, \beta\} \subseteq F$ とするとき，
$\{\alpha, s\beta\}$ が $K(s)$ 上で代数的従属 $\Longrightarrow$ $\{\alpha, \beta\}$ が K 上で代数的従属.

講義で（アドリブで）やった証明では，$K = \mathbf{Q}$ の場合を扱い，s に数値を代入した．しかし，K が有限体の場合には，これは危ない.（$K = \mathbf{Q}$ の場合も含めて）以下のように考えるのが，最も素直であり，簡単である.

$\{\alpha, s\beta\}$ が $K(s)$ 上で代数的従属ならば，ある $p(X, Y) \in K(s)[X, Y]$ が存在して $p(\alpha, s\beta) = 0$．ここで，

$$p(X, Y) = \sum_{i,j} c_{ij}(s) X^i Y^j$$

とかくとき，$c_{ij}(s) \in K[s]$（K 係数の多項式）としてよい（定義からは，有理式であるが，分母を払ってよいので，多項式と仮定できる）．さらに

$$c_{ij}(s) = \sum_k d_{ijk} s^k \qquad (d_{ijk} \in K)$$

とおいて，上の式に代入すると，

$$p(X, Y) = \sum_{i,j,k} d_{ijk} X^i Y^j s^k, \qquad p(\alpha, s\beta) = \sum_{i,j,k} d_{ijk} \alpha^i \beta^j s^{k+j} = 0.$$

s は不定元であるから，第２の式は，F 係数の s に関する多項式が 0 に等しいことを述べている．従って，$\tilde{d}_{ijk} = d_{ij,k-j}$ とおくと，任意の k に対して

$$\sum_{i,j} \tilde{d}_{ijk} \alpha^i \beta^j = 0 \qquad (\tilde{d}_{ijk} \in K).$$

これは，$\{\alpha, \beta\}$ が K 上で代数的従属であることを示している.（係数 $\tilde{d}_{ijk}$ の中には 0 でないものが存在することに注意.）

以上