次元解析

室田一雄 (vers. 2005-05-06)

1　物理次元 (dimension, physical dimension)

物理量はそれぞれの基本的な性格にしたがって，[長さ]，[質量]，[時間]，[速度] のように分類でき，[長さ] は cm, m, km や尺，インチなどで測られ，[質量] は kg, g や貫，ポンドなどで，また，[時間] は秒 (s)，分 (min) などで測られる．これらの単位の間では，それぞれ換算が可能であり，例えば，1 尺 = 約 30.3 cm, 1 kg=1000 g, 1 min=60 s である．一方，[速度] は [長さ] ／ [時間] だから，その大きさは，毎秒何メートル，つまり，m/s などを単位として測られる．このような [長さ]，[質量]，[時間]，あるいは，

$$
\begin{aligned}
[\text{速度}] &= [\text{長さ}] \cdot [\text{時間}]^{-1}, \\
[\text{加速度}] &= [\text{長さ}] \cdot [\text{時間}]^{-2}, \\
[\text{力}] &= [\text{質量}] \cdot [\text{加速度}] \\
&= [\text{長さ}] \cdot [\text{質量}] \cdot [\text{時間}]^{-2}
\end{aligned}
$$

などを物理量の次元といい，[長さ]，[質量]，[時間] を基本量と考えるとき，それらの関係式で表される [速度]，[加速度]，[力] などを誘導量という．また，これらと独立な次元に [電荷] などがある．

数学的には，上のような関係式における [長さ]，[質量]，[時間] の「べき」を並べたベクトル $(1, 0, -1)$, $(1, 0, -2)$, $(1, 1, -2)$ によって [速度]，[加速度]，[力] の次元が表されると考えると便利である．すると，基本量の選び方は，このベクトル空間の基底の取り方に対応している．次元を表すベクトルの成分は，一般には整数とは限らず有理数になる．

なお，例えば，[角度] は，度やラジアンで測る量であるが，その次元は，[長さ] ／ [長さ] であるので，零ベクトル $(0, 0, 0)$ に対応する．このような量を無次元量という．

2　次元解析 (dimensional analysis)

物理的に意味のある関係を表現する方程式は物理次元 (physical dimension）に関して整合的であるという原理に基づいて方程式の形を定めようとする方法論をいう．例えば，単振子の周期 T が振子の長さ l と重力加速度 g だけで定まることがわかっているとして $T = c \cdot l^{\alpha} g^{\beta}$ の形（c は定数）を仮定し，未知の指数 α, β を定めたいとする．T, l, g の物理次元を $[T], [l], [g]$ と表すと，$[T]$ = 時間，$[l]$ = 長さ，$[g]$ = (長さ) $\times$ (時間)$^{-2}$ である．関係式 $T = c \cdot l^{\alpha} g^{\beta}$ の物理次元の整合性 $[T] = [l]^{\alpha}[g]^{\beta}$ にこれを代入すると，時間 = (長さ)$^{\alpha+\beta}$(時間)$^{-2\beta}$ となるので $\alpha = 1/2$，$\beta = -1/2$ と決定される．すなわち，$T = c\sqrt{l/g}$ である．なお，無次元量である定数 c の値は次元解析からは決定できない．

3　混合多項式行列の次元解析

これが講義の主題です．

以上