

# 応用数理学：混合行列の階数公式

室田一雄 (ver. 4.: 2005-07-27)

混合行列の階数公式を示し、その証明の要点をまとめる。マトロイドの双対定理、離散双対定理などの本質を線形代数の世界で理解するのが目的である。

## 1 基本原理

### 1.1 混合行列と層混合行列の等価性

混合行列 (mixed matrix) に対する公式と層混合行列 (layered mixed matrix, LM-matrix) に対する公式は、本質的に等価である。当然のこととして、層混合行列は混合行列の特殊ケースであるが、逆に、次の関係を使うと、層混合行列に関する公式から混合行列に関する公式が導出できる。

一般に、 $m \times n$  混合行列  $A = Q + T$  に対して、 $(2m) \times (m + n)$  層混合行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{Q} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & Q \\ -\text{diag}[t_1, \dots, t_m] & T \end{pmatrix} \quad (1)$$

を対応させることにより、層混合行列に関する結果から混合行列に関する結果が導かれる。

$$\text{rank } \tilde{A} = m + \text{rank } A \quad (2)$$

に注意する。

### 1.2 分割行列階数原理

次の自明な不等式が、弱双対性を生む。

$$\text{rank } [B \mid C] \leq \text{rank } B + \text{rank } C, \quad \text{rank } \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} \leq \text{rank } B + \text{rank } C. \quad (3)$$

この関係式を分割行列階数原理と呼ぶことにする。

## 2 層混合行列の階数

### 2.1 階数公式

定理 1 LM行列  $A = \begin{pmatrix} Q \\ T \end{pmatrix}$  に対して、

$$\text{rank } A = \max\{\text{rank } Q[R_Q, J] + \text{t-rank } T[R_T, C \setminus J] \mid J \subseteq C\}. \quad (4)$$

( $R_Q$  は  $Q$  の行集合、 $R_T$  は  $T$  の行集合、 $C$  は  $A$  の列集合である。)

(注意)  $T$  の非零要素の代数的独立性を仮定しないときには,

$$\text{rank } A \leq \max\{\text{rank } Q[R_Q, J] + \text{t-rank } T[R_T, C \setminus J] \mid J \subseteq C\}$$

となる.

定理 2 ([1, p.138, Theorem 4.2.5]) LM行列  $A = \begin{pmatrix} Q \\ T \end{pmatrix}$  に対して,

$$\text{rank } A = \min\{\rho(J) + \gamma(J) - |J| \mid J \subseteq C\} + |C|, \quad (5)$$

ただし

$$\begin{aligned} \rho(J) &= \text{rank } Q[R_Q, J], & J \subseteq C, \\ \Gamma(J) &= \{i \in R_T \mid \exists j \in J : T_{ij} \neq 0\}, & J \subseteq C, \\ \gamma(J) &= |\Gamma(J)|, & J \subseteq C. \end{aligned}$$

(0) 劣モジュラ性: 式 (5) の右辺が  $\min$ (劣モジュラ関数) の形であることに注意.

(1) 弱双対性: 任意の  $J \subseteq C$  に対して,  $\text{rank } A \leq \rho(J) + \gamma(J) - |J| + |C|$ .

← 分割行列階数原理で証明する.

(2) 強双対性: ある  $J \subseteq C$  に対して,  $\text{rank } A \geq \rho(J) + \gamma(J) - |J| + |C|$ .

← アルゴリズムによって  $J$  を構成して証明する.

例 1

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ f_1 \\ f_2 \end{array} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & t_3 & 0 & 0 & t_4 \end{array} \quad (6)$$

$C = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ,  $R_T = \{f_1, f_2\}$ .  $\text{rank } A = 4$  である.  $J = \{x_1, x_3\}$  は (4) の右辺の最大値  $2 + 2 = 4$  を与える.  $J = \{x_3, x_4\}$  は (5) の右辺の最小値  $1 + 0 - 2 + 5 = 4$  を与える.

## 2.2 定理 1 の証明

Laplace 展開によって証明できる. まず, 正則行列を考える.

補題 1 ([1, p.136, Lemma 4.2.1]) 正方 LM行列  $A = \begin{pmatrix} Q \\ T \end{pmatrix}$  が正則

⇔ ある  $J \subseteq C$  が存在して  $Q[R_Q, J]$ ,  $T[R_T, C \setminus J]$  がともに正則.

(証明) 一般化 Laplace 展開

$$\det A = \sum_{J \subseteq C, |J|=|R_Q|} \pm \det Q[R_Q, J] \cdot \det T[R_T, C \setminus J]$$

を考える.

もし,  $\det A \neq 0$  なら, 右辺の和には非零の項がある, すなわち, ある  $J$  に対して  $\det Q[R_Q, J] \neq 0$  かつ  $\det T[R_T, C \setminus J] \neq 0$ .

逆に, ある  $J_0$  に対して  $Q[R_Q, J_0]$  と  $T[R_T, C \setminus J_0]$  がともに正則としよう.  $\det T[R_T, C \setminus J_0]$  に含まれる項のひとつを  $t_1 t_2 \cdots t_k$  (ここで  $k = |R_T|$ ) とすると,  $T$  の非零要素の代数的独立性により, 同類項が他の  $J$  から出てくることはない. したがって,  $t_1 t_2 \cdots t_k$  の係数は  $\det Q[R_Q, J_0]$  に等しく, これは 0 でないから  $\det A \neq 0$ . ■

補題 1 を使って定理 1 を証明しよう. 正則とは限らない層混合行列  $A$  が与えられたとして,  $r = \text{rank } A$  とする.

$r$  次の正則部分行列  $A'$  がある. その行集合, 列集合を  $R', C'$  とする ( $|R'| = |C'| = r$ ). この  $A'$  は層混合行列  $A' = \begin{pmatrix} Q' \\ T' \end{pmatrix}$  である ( $Q'$  の行集合を  $I_Q$ ,  $T'$  の行集合を  $I_T$  とする). 補題 1 により, ある  $J \subseteq C'$  に対して,  $Q[I_Q, J]$ ,  $T[I_T, C' \setminus J]$  はともに正則である. したがって,

$$\begin{aligned} |J| = \text{rank } Q[I_Q, J] &\leq \text{rank } Q[R_Q, J], \\ |C' \setminus J| = \text{t-rank } T[I_T, C' \setminus J] &\leq \text{t-rank } T[R_T, C \setminus J] \end{aligned}$$

となり,

$$\text{rank } A = r = |C'| \leq \text{rank } Q[R_Q, J] + \text{t-rank } T[R_T, C \setminus J].$$

したがって, (4) で,  $\text{rank } A \leq \max\{\cdots\}$ .

逆に, (4) の右辺の最大値を達成する  $J$  をとる.  $Q[R_Q, J]$ ,  $T[R_T, C \setminus J]$  のそれぞれについて, 最大ランクの部分行列を考えると...

ある  $I_Q \subseteq R_Q$ ,  $J_Q \subseteq J$ ,  $I_T \subseteq R_T$ ,  $J_T \subseteq C \setminus J$  が存在して,

$$\begin{aligned} |I_Q| = |J_Q| = \text{rank } Q[I_Q, J_Q] &= \text{rank } Q[R_Q, J], \\ |I_T| = |J_T| = \text{t-rank } T[I_T, J_T] &= \text{t-rank } T[R_T, C \setminus J]. \end{aligned}$$

すると, 補題 1 により,  $A[I_Q \cup I_T, J_Q \cup J_T]$  は正則であり,  $\text{rank } A[I_Q \cup I_T, J_Q \cup J_T] = |J_Q| + |J_T|$ . ゆえに,  $\text{rank } A \geq \text{rank } A[I_Q \cup I_T, J_Q \cup J_T] = |J_Q| + |J_T| = \text{rank } Q[R_Q, J] + \text{t-rank } T[R_T, C \setminus J] = \max\{\cdots\}$ .

### 2.3 定理 2 の弱双対性の証明

分割行列階数原理を用いて,

$$\begin{aligned} \text{rank } A &\leq \text{rank } A[R, J] + \text{rank } A[R, C \setminus J] \\ &\leq \text{rank } A[R_Q, J] + \text{rank } A[R_T, J] + \text{rank } A[R, C \setminus J] \\ &= \text{rank } Q[R_Q, J] + \text{rank } T[R_T, J] + \text{rank } A[R, C \setminus J] \\ &\leq \rho(J) + \gamma(J) + |C \setminus J|. \end{aligned}$$

なお, 最後の不等式の理由は,

$$\begin{aligned} \text{rank } Q[R_Q, J] &= \rho(J), \\ \text{rank } T[R_T, J] &\leq (\text{非零行数}) = \gamma(J), \\ \text{rank } A[R, C \setminus J] &\leq (\text{列数}) = |C \setminus J|. \end{aligned}$$

## 2.4 定理 2 の強双対性の証明

### 2.4.1 要点の考察

1. 基本的には、マッチングの枠組みを使う。
  - (a) 補助グラフを作って、交互道をさがす。
  - (b) 交互道が存在すれば、マッチングを増大 (増加道) — primal
  - (c) 交互道がなければ、到達可能頂点から、最小被覆 (最小カット) を構成 — dual
2.  $Q$  の部分の数値的情報を表現する必要がある。
  - ⇒ マッチングの端点で  $Q$  の列ベクトルの独立性 (マトロイド構造) を表現する。
  - ⇒ 独立マッチングの枠組みを使う。
3. 独立マッチングの枠組みにおける主要な論点
  - (a) 補助グラフの定義は? とくに,  $Q$  の構造 (数値的情報) の表現法は? その上で, 交互道をさがすという方針でいいか?
  - (b) 交互道が存在するとき, 独立性を保ってマッチングを増大するには? — primal
    - ⇒ 最短路 (枝数最小) の交互道を使えばよい。
  - (c) 交互道がないとき, 到達可能頂点から,  $\text{rank } A \geq \rho(J) + \gamma(J) - |J| + |C|$  を満たす  $J$  が構成できる。 — dual
    - ⇐ 定理 1 を用いて証明
4. 独立マッチングの根源的疑問  
数値情報がグラフで表現できてしまうのは何故?
  - グラフで表現できるのは, 零 / 非零の区別だけ
  - 零 / 非零の区別だけで正則性が保証できるのは三角行列だから
  - 三角行列が見つかるのは最短路を使うから  
双対定理を支える三角行列

### 2.4.2 独立マッチングの定義

2部グラフ  $G = (R_T \cup C_Q, C; E_T \cup E_Q)$ . ただし,  $C_Q = \{j_Q \mid j \in C\}$  は  $C$  のコピー ( $j \in C$  のコピーを  $j_Q \in C_Q$  と書いた),  $E_T = \{(i, j) \mid i \in R_T, j \in C, T_{ij} \neq 0\}$ ,  $E_Q = \{(j_Q, j) \mid j \in C\}$ .

枝集合  $E_T \cup E_Q$  の部分集合  $M$  に対して, その端点の集合を  $\partial M$  と表す.  $\partial M \subseteq R_T \cup C_Q \cup C$  である.  $M$  がマッチングとは,  $M$  の枝が端点を共有しないこと, すなわち  $|\partial M| = 2|M|$  が成り立つことをいう.  $M$  が独立マッチングとは, マッチングであって, さらに,  $Q$  側の端点集合  $C \cap \partial(M \cap E_Q)$  に対応する  $Q$  の列ベクトルが線形独立である<sup>1</sup>ことをいう.

独立マッチングの大きさは  $\text{rank } A$  と密接な関係をもつ.

<sup>1</sup> $Q$  の列ベクトルの独立性が定めるマトロイド  $M(Q)$  が  $C_Q$  上に与えられていると考えと, この付帯条件は,  $C_Q \cap \partial M$  が  $M(Q)$  における独立集合ということである.

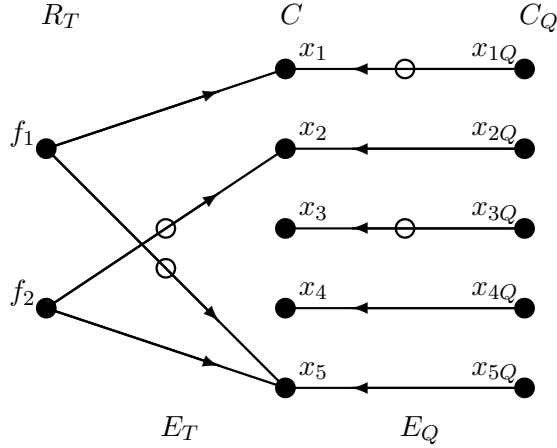


図 1: Graph  $G$  (○: arc in a maximum independent matching  $M$ )

補題 2 ([1, p.143, Theorem 4.2.18])  $M$  が独立マッチングならば,  $\text{rank } A[R, C \cap \partial M] = |M|$ . したがって,  $\text{rank } A \geq |M|$ . さらに,

$$\text{rank } A = \max\{|M| \mid M \text{ は独立マッチング}\}.$$

(証明)  $J_Q = C \cap \partial(M \cap E_Q)$ ,  $J_T = C \cap \partial(M \cap E_T)$  とすると,  $J_Q \cup J_T = C \cap \partial M$  であり,  $\text{rank } Q[R_Q, J_Q] = |J_Q|$ ,  $\text{t-rank } T[R_T, J_T] = |J_T|$ . すると, 定理 1 により,  $\text{rank } A[R, J_Q \cup J_T] = |J_Q \cup J_T| = |M|$ . さらに  $|M|$  の最大値が  $\text{rank } A$  に一致することも, 定理 1 から示される. ■

例 2 例 1 の行列

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ f_1 & t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ f_2 & 0 & t_3 & 0 & 0 & t_4 \end{array} \end{array} \quad (7)$$

を再び考える. 図 1 に示すように,  $C = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ,  $C_Q = \{x_{1Q}, x_{2Q}, x_{3Q}, x_{4Q}, x_{5Q}\}$ ,  $R_T = \{f_1, f_2\}$ . ○印は最大独立マッチング  $M = \{(f_1, x_5), (f_2, x_2), (x_{1Q}, x_1), (x_{3Q}, x_3)\}$ .  $\text{rank } A = |M| = 4$  である. また,  $J = C \cap \partial(M \cap E_Q) = \{x_1, x_3\}$  は (4) の右辺の最大値を与えている.

問題 1 例 2 の行列 (7) について, 最大独立マッチングをすべて列挙せよ.

### 2.4.3 補助グラフ

独立マッチング  $M$  に関する補助グラフ  $\tilde{G} = \tilde{G}_M$  の点集合は  $\tilde{V} = R_T \cup C_Q \cup C$  であり, 枝集合は  $\tilde{E} = E_T \cup E_Q \cup E^+ \cup M^\circ$  で定義される. ここで,  $M^\circ$  は  $M$  の枝の向きを逆にし

た枝の集合である．したがって， $M^\circ$  の枝は  $C$  から  $R_T \cup C_Q$  に向かっている（下の例 3 と図 2 を見ながら読み進むとよい．）

$E^+$  は  $Q$  の列ベクトルの線形独立性（マトロイド  $M(Q)$  の構造）を表現するもので，独立マッチング問題に特有の部分である．

$$I = C \cap \partial(M \cap E_Q), \quad (8)$$

$$J = \{j \in C \setminus I \mid \text{rank } Q[R_Q, I \cup \{j\}] = |I|\} \quad (9)$$

とおくと  $\text{rank } Q[R_Q, I] = |I|$  である． $E^+$  は， $i \in I, j \in J$  に対して，

$$(i_Q, j_Q) \in E^+ \iff I - i + j \text{ に対応する } Q \text{ の列ベクトルは独立} \quad (10)$$

によって定義される． $E^+$  の枝は  $C_Q$  の 2 点をつないでいることに注意．

さらに，入口  $S^+$  と出口  $S^-$  を

$$S^+ = (R_T \setminus \partial M) \cup \{j_Q \in C_Q \mid j \in C \setminus (I \cup J)\}, \quad S^- = C \setminus \partial M$$

と定義する．アルゴリズムは，入口  $S^+$  から出口  $S^-$  への最短路（枝数最小の有向道）を探すことを繰り返す．有向道のある場合の状況を §2.4.4 で，ない場合の状況を §2.4.5 で扱う．

具体的な計算手順としては， $Q$  から行変形で作られる行列  $P$  を用いて  $I, J, S^+, E^+$  を決定する． $P$  の  $I$  に対応する列ベクトルが，単位ベクトルとなるようにしておく． $P$  の列番号は  $Q$  と同じ  $C$  であるが，行番号は  $I$  とそれ以外の部分  $Z$  に分かれている．これより，

$$J = \{j \in C \setminus I \mid P_{ij} = 0 \ (\forall i \in Z)\}, \quad E^+ = \{(i_Q, j_Q) \mid i \in I, j \in J, P_{ij} \neq 0\} \quad (11)$$

と定めればよい．例えば，

$$P = \begin{array}{c|cccccc|cccc|cccc} & \leftarrow & & I & & \rightarrow & \leftarrow & & J & & \rightarrow & \leftarrow & & K & & \rightarrow \\ & i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & k_1 & k_2 & k_3 & & \\ \uparrow & i_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e & e & e & e & * & * & * & & \\ & i_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & e & e & e & e & * & * & * & & \\ I & i_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e & e & e & e & * & * & * & & \\ & i_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & e & e & e & e & * & * & * & & \\ & i_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e & e & e & e & * & * & * & & \\ \downarrow & i_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e & e & e & e & * & * & * & & \\ \hline \uparrow & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & s & s & & \\ Z & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & s & s & & \\ & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & s & s & & \\ \downarrow & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & s & s & & \end{array} \quad (12)$$

のようになる．ここで， $e$  のうち非零のものが  $E^+$  の枝に対応する．また， $K = C \setminus (I \cup J)$  の各列は  $s$  の部分に非零要素をもっており， $C_Q$  側の入口に対応する．すなわち， $C_Q \cap S^+ = \{j_Q \in C_Q \mid j \in K\}$  である．

最大独立マッチングを求めるアルゴリズムの詳細は §4 において示す．

例 3 例 2 の行列 (7) を考える．独立マッチング  $M = \{(f_2, x_2), (x_{3Q}, x_3)\}$  に対応する補助グラフは図 2 のようになる．

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

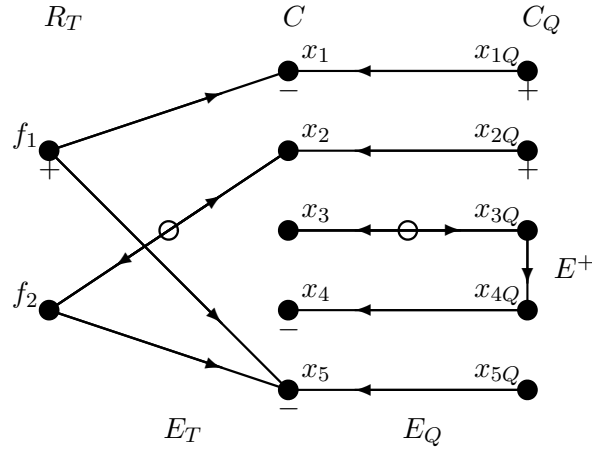


図 2: Graph  $\tilde{G}$  for an independent matching  $M$  ( $\circ$ : arc in  $M$ ;  $+$ : vertex in  $S^+$ ;  $-$ : vertex in  $S^-$ )

であり, 入口  $S^+ = \{f_1, x_{1Q}, x_{2Q}\}$ , 出口  $S^- = \{x_1, x_4, x_5\}$  である. また, (8) の  $I = \{x_3\}$ , (9) の  $J = \{x_4, x_5\}$ .

問題 2 例 2 の行列 (7) について,  $M = \{(f_1, x_1), (x_{2Q}, x_2), (x_{4Q}, x_4)\}$  が独立マッチングであることを説明し, 対応する補助グラフを描け.

#### 2.4.4 道が存在するとき

入口から出口への最短路に沿ってマッチングを組み替えることを考える. 最短路上には  $E^+$  の枝がある (可能性がある) が, これについては,

$$(i_Q, j_Q) \in E^+ \implies I - i + j \text{ に対応する } Q \text{ の列ベクトルは独立}$$

が成り立つ (式 (10) 参照. また,  $I$  の定義は (8)). このとき,  $E^+$  の枝を何本も使うと, 複数の入れ替えが同時に起こるが, それでも独立性が保たれるか心配である. 例えば, 入口の点が  $R_T$  の点のとき, 最短路上にある  $E^+$  の枝を順に  $(i_{1Q}, j_{1Q}), \dots, (i_{kQ}, j_{kQ})$  として,

$$I' = (I \setminus \{i_1, \dots, i_k\}) \cup \{j_1, \dots, j_k\} \text{ に対応する } Q \text{ の列ベクトルは独立}$$

となって欲しい. 実は, このような同時交換ができる.

その理由は, 最短路を選んだことにより  $(i_p, j_q)$  ( $p < q$ ) のタイプのショートカットが存在しないことにある. このとき, 下の行列 ( $k = 4$  としている) の  $e$  が非零,  $0_s$  が零になっているので,  $I'$  に対応する  $Q$  の列ベクトルは独立になる (“no-short cut lemma” [1, p.83, Lemma 2.3.22]). 行番号が  $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ , 列番号が  $\{j_1, j_2, j_3, j_4\}$  の部分行列が三角行列になっていることに注意.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \leftarrow & I & \rightarrow \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & 0 & 0 & j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ i_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & * & e & 0_s & 0_s \\ i_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & e & 0_s \\ i_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & e \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\
P = \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{ccc} \leftarrow & I' & \rightarrow \end{array} \right. \qquad (13)
\end{array}$$

### 2.4.5 道が存在しないとき

入口  $S^+$  から出口  $S^-$  に有向道がない状況を考える．出口  $S^-$  に到達できる点の集合を  $W$  とし， $J = W \cap C$  とおく（図3参照）．実は，この  $J$  が強双対性を示す求めるものである．

1.  $W \supseteq S^-$ ,  $W \cap S^+ = \emptyset$ .
2.  $C$  と  $C_Q$  の対応する点は，同時に  $W$  に属する ( $j \in W \iff j_Q \in W$ ) .

**補題 3** 上のように定めた  $J$  について， $\text{rank } A \geq \rho(J) + \gamma(J) - |J| + |C|$  (強双対性).

(証明) まず， $I_T = W \cap R_T$  とおき，次に，出口でない  $C$  の点を分類する．

$$J_Q = J \cap \partial(M \cap E_Q) \quad (Q \text{ 側のマッチングの端点で } J \text{ 内のもの})$$

$$J_T = J \cap \partial(M \cap E_T) \quad (T \text{ 側のマッチングの端点で } J \text{ 内のもの})$$

$$K_Q = (C \setminus J) \cap \partial(M \cap E_Q) \quad (Q \text{ 側のマッチングの端点で } J \text{ 外のもの})$$

$$K_T = (C \setminus J) \cap \partial(M \cap E_T) \quad (T \text{ 側のマッチングの端点で } J \text{ 外のもの})$$

このとき， $Q$  の部分を行変形した行列は以下のような形になる．この行列の非零要素が補助グラフの枝を定めている．

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \leftarrow & J & \rightarrow \\ S^- & \leftarrow & C \cap \partial M & \rightarrow \\ S^- & J_Q & J_T & K_Q & K_T \end{array} \\
\begin{array}{c} J_Q \\ K_Q \\ \\ I_T \\ R_T \\ \downarrow S^+ \cap R_T \end{array} \left. \begin{array}{ccc} * & I & * \\ O_2 & O_1 & O_2 \\ O_3 & O_1 & O_3 \\ * & * & T_J \\ O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{ccc} O_1 & * \\ I & * \\ O_1 & Q_K \\ * & * \\ * & T_K \\ * & * \end{array} \right\} \begin{array}{l} \updownarrow \rho(J) \\ \updownarrow \gamma(J) \end{array} \qquad (14)
\end{array}$$

1.  $T_J, T_K$  は対角が非零の正方形 (対角要素は  $T$  側のマッチングに対応) .



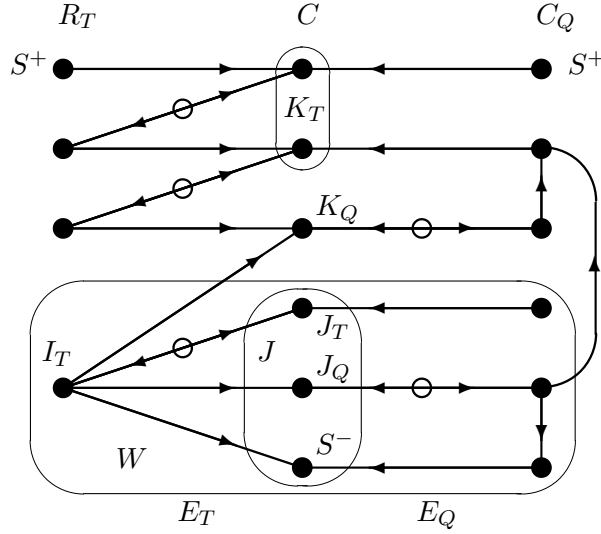


図 3: Graph  $\tilde{G}$  with no path from  $S^+$  to  $S^-$  (○: arc in  $M$ )

2.  $Q$  を変形して  $J_Q \cup K_Q$  の列が単位ベクトルになるようにしたから,  $O_1$  は零行列.
3.  $C_Q \setminus W$  から  $C_Q \cap W$  に入る枝はなく,  $C_Q \setminus W \supseteq \{j_Q \in C_Q \mid j \in K_Q\}$  ( $K_Q$  の  $C_Q$  側コピー) で,  $C_Q \cap W$  は  $J$  の  $C_Q$  側コピーだから,  $O_2$  は零行列.
4.  $W \cap S^+ = \emptyset$  より,  $J$  の点の  $C_Q$  側コピーは入口でない (すなわち,  $j \in J \Rightarrow j_Q \notin S^+ \cap C_Q$ ) ので,  $O_3$  は零行列<sup>2</sup>.
5.  $R_T \setminus W (= R_T \setminus I_T)$  から  $J$  に入る枝はないので,  $O_4$  は零行列.
6.  $M$  は独立マッチングだから, 補題 2 より,  $\text{rank } A[R, C \cap \partial M] = |C \cap \partial M|$ .
7.  $O_2, O_3$  が零行列だから,  $\rho(J) = |J_Q|$ .
8.  $O_4$  が零行列で  $T_J$  の対角要素は非零だから,  $\Gamma(J) = I_T$  であり,  $\gamma(J) = |I_T| = |J_T|$ .

これを用いて以下のように計算する.

$$\text{rank } A \geq \text{rank } A[R, C \cap \partial M] = |C \cap \partial M| = |J_Q| + |J_T| + |C \setminus J| = \rho(J) + \gamma(J) + |C \setminus J|.$$

■

これで, 定理 2 (層混合行列の階数公式) の証明が完了した.

例 4 例 2 の続きを考える. 図 1 の最大独立マッチング  $M = \{(f_1, x_5), (f_2, x_2), (x_{1Q}, x_1), (x_{3Q}, x_3)\}$  に対応する補助グラフは図 4 のようになる.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \end{array}$$

<sup>2</sup> $K_T$  の一部が  $Q$  側の入口  $S^+ \cap C_Q$  である. 列  $j \in K_T$  (に対応する点  $j_Q \in C_Q$ ) が入口  $\iff Q_K$  の列  $j$  が非零ベクトル.

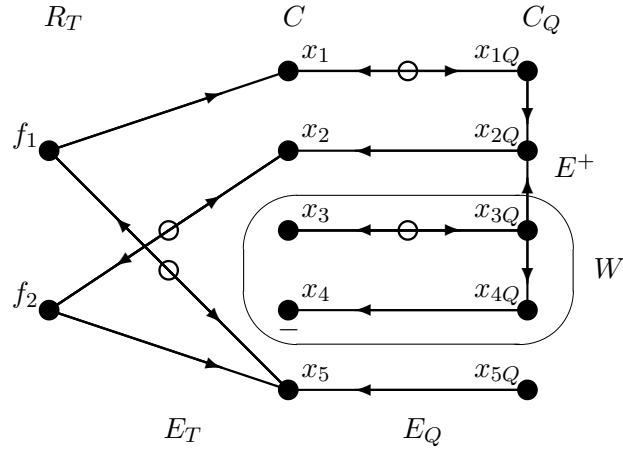


図 4: Graph  $\tilde{G}$  for a maximum independent matching  $M$  ( $\circ$ : arc in  $M$ ;  $S^+ = \emptyset$ ,  $-$ : vertex in  $S^-$ , vertex in  $W$  is reachable to  $S^-$ )

であり，出口  $S^- = \{x_4\}$  に到達可能な点の集合は  $W = \{x_3, x_4, x_{3Q}, x_{4Q}\}$ ， $J = W \cap C = \{x_3, x_4\}$  である．この  $J$  が (5) の右辺の最小値を与える．補題 3 の証明中の記号で， $I_T = \emptyset$ ， $J_T = \emptyset$ ， $J_Q = \{x_3\}$ ， $K_Q = \{x_1\}$ ， $K_T = \{x_2, x_5\}$  である．

問題 3 問題 1 で求めた最大独立マッチングのそれぞれに対応する補助グラフから  $W$  を求めよ．どのような現象が観察されるか．それが一般に正しいか，証明を試みよ．

## 2.5 定理 2 (層混合行列の階数公式) の別証明

層混合行列の階数公式に対して，マトロイドの合併に関する Edmonds の公式と 2 部グラフのマッチングに関する Hall–Ore の公式を利用した“知識集約型”証明法 (1985 年 4 月) を示そう．

項別階数を表す関数  $\tau : 2^C \rightarrow \mathbf{Z}$ :

$$\tau(J) = \text{t-rank } T[R_T, J], \quad J \subseteq C,$$

と非零行数を表す関数  $\gamma : 2^C \rightarrow \mathbf{Z}$  の間には，次の関係がある (Hall–Ore の公式):

$$\tau(J) = \min\{\gamma(K) - |K| \mid K \subseteq J\} + |J|, \quad J \subseteq C. \quad (15)$$

(Hall–Ore の公式は最大マッチング・最小被覆の定理と等価である.)

マトロイド理論における Edmonds の公式を使うために，定理 1 をマトロイドの言葉に翻訳する．行列  $A, Q, T$  が定める  $C$  上のマトロイドを  $M(A), M(Q), M(T)$  とする．

1.  $A$  の行列としての階数は，対応するマトロイド  $M(A)$  の階数に等しい．すなわち， $\text{rank } A = \text{rank } M(A)$ .
2. 同様に， $Q, T$  の行列としての階数関数は，対応するマトロイド  $M(Q), M(T)$  の階数関数に等しい．すなわち， $\rho, \tau$  は  $M(Q), M(T)$  の階数関数である．

3. 補題 1 を翻訳すると： $\mathbf{M}(A)$  は  $\mathbf{M}(Q)$  と  $\mathbf{M}(T)$  の合併マトロイドに等しい。  
すなわち， $\mathbf{M}(A) = \mathbf{M}(Q) \vee \mathbf{M}(T)$ .
4. 合併マトロイドに関する Edmonds の公式：

$$\text{rank}(\mathbf{M}(Q) \vee \mathbf{M}(T)) = \min\{\rho(J) + \tau(J) - |J| \mid J \subseteq C\} + |C|. \quad (16)$$

以上をもちいて，次のように計算すると，定理 2 の式 (5) が証明される．

$$\begin{aligned} \text{rank } A &= \text{rank } \mathbf{M}(A) \\ &= \text{rank}(\mathbf{M}(Q) \vee \mathbf{M}(T)) \\ &= \min_J\{\rho(J) + \tau(J) - |J| \mid J \subseteq C\} + |C| \\ &= \min_J\{\rho(J) + \min_K\{\gamma(K) - |K| \mid K \subseteq J\} \mid J \subseteq C\} + |C| \\ &= \min_K\{\min_J\{\rho(J) \mid J \supseteq K\} + \gamma(K) - |K| \mid K \subseteq C\} + |C| \\ &= \min_K\{\rho(K) + \gamma(K) - |K| \mid K \subseteq C\} + |C|. \end{aligned}$$

問題 4 上の証明の過程で

$$\text{rank } A = \min\{\rho(J) + \tau(J) - |J| \mid J \subseteq C\} + |C| \quad (17)$$

という公式が得られている．これと (5) を比べて，この 2 つの公式の違いや優劣について考察せよ（実は，これは非常に悩ましく，かつ，重要なポイントである）．

### 3 混合行列の階数

#### 3.1 階数公式

定理 3 混合行列  $A = Q + T$  に対して，

$$\text{rank } A = \max\{\text{rank } Q[I, J] + \text{t-rank } T[R \setminus I, C \setminus J] \mid I \subseteq R, J \subseteq C\}. \quad (18)$$

定理 4 ([1, p.141, Theorem 4.2.13]) 混合行列  $A = Q + T$  に対して，次のような  $I \subseteq R$ ,  $J \subseteq C$  が存在する：

- (i)  $|I| + |J| - \text{rank } Q[I, J] = |R| + |C| - \text{rank } A$ ,
- (ii)  $\text{rank } T[I, J] = 0$ .

- (1) 弱双対性： $\text{rank } T[I, J] = 0$  ならば， $|I| + |J| - \text{rank } Q[I, J] \leq |R| + |C| - \text{rank } A$ .  
 $\Leftarrow$  分割行列階数原理で証明する．
- (2) 強双対性：ある  $I \subseteq R$ ,  $J \subseteq C$  に対して，  
 $\text{rank } T[I, J] = 0$  かつ  $|I| + |J| - \text{rank } Q[I, J] \geq |R| + |C| - \text{rank } A$ .  
 $\Leftarrow$  定理 2 に帰着させて証明する．

### 3.2 定理 3 の証明

定理 1 の証明と同様に，行列式の展開によって証明できる．

補題 4 ([1, p.139, Lemma 4.2.7]) 正方混合行列  $A = Q + T$  が正則

$\iff$  ある  $I \subseteq R, J \subseteq C$  が存在して  $Q[I, J], T[R \setminus I, C \setminus J]$  がともに正則．

(証明) 行列式の展開 (定義式) により

$$\det A = \det(Q + T) = \sum_{I \subseteq R} \sum_{J \subseteq C} \pm \det Q[I, J] \cdot \det T[R \setminus I, C \setminus J].$$

もし,  $\det A \neq 0$  なら, 右辺の和には非零の項がある, すなわち, ある  $I, J$  に対して  $\det Q[I, J] \neq 0$  かつ  $\det T[R \setminus I, C \setminus J] \neq 0$ .

逆に, ある  $I_0, J_0$  に対して  $Q[I_0, J_0]$  と  $T[R \setminus I_0, C \setminus J_0]$  がともに正則としよう.  $\det T[R \setminus I_0, C \setminus J_0]$  に含まれる項のひとつを  $t_1 t_2 \cdots t_k$  (ここで  $k = |R \setminus I_0|$ ) とすると,  $T$  の非零要素の代数的独立性により, 同類項が他の  $(I, J)$  から出てくることはない. したがって,  $t_1 t_2 \cdots t_k$  の係数は  $\det Q[I_0, J_0]$  に等しく, これは 0 でないから  $\det A \neq 0$ . ■

### 3.3 定理 4 の弱双対性の証明

$T[I, J] = O$  とする. 分割行列階数原理を用いて,

$$\begin{aligned} \text{rank } A &\leq \text{rank } A[R, J] + \text{rank } A[R, C \setminus J] \\ &\leq \text{rank } A[I, J] + \text{rank } A[R \setminus I, J] + \text{rank } A[R, C \setminus J] \\ &\leq \text{rank } Q[I, J] + |R \setminus I| + |C \setminus J|. \end{aligned}$$

### 3.4 定理 4 の強双対性の証明

定理 2 から定理 4 の強双対性を導こう.

混合行列  $A = Q + T$  が与えられたとき, 層混合行列  $\tilde{A}$  に定理 2 を適用して,  $\tilde{J} \subseteq R \cup C$  をとる.  $I = R \setminus \tilde{J}, J = C \cap \tilde{J}$  とおく. このとき, 以下のことを示すことができる.

- (1)  $\tilde{\rho}(\tilde{J}) = \text{rank } Q[I, J] + |R \setminus I|$ .
- (2)  $I \cap \Gamma(J) = \emptyset$  と仮定してよい.
- (3)  $\text{rank } T[I, J] = 0$ .
- (4)  $|I| + |J| - \text{rank } Q[I, J] \geq |R| + |C| - \text{rank } A$ .

### 3.5 補足：混合行列の階数公式 $\Rightarrow$ 層混合行列の階数公式

定理 4 (混合行列の階数公式) を認めて, これから定理 2 (層混合行列の階数公式) の強双対性を導くには次のようにする.

層混合行列  $A = \begin{pmatrix} Q \\ T \end{pmatrix}$  が与えられたとき, 混合行列  $A = \begin{pmatrix} Q \\ O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ T \end{pmatrix}$  に定理 4 を適用して, (i), (ii) を満たす  $(I, J)$  をとる. このとき, 以下のことを示すことができる.

- (1)  $I \supseteq R_Q$  と仮定してよい .
- (2)  $\rho(J) = \text{rank } Q[I, J]$  .
- (3)  $\gamma(J) \leq |R \setminus I|$  .
- (4)  $\text{rank } A \geq \rho(J) + \gamma(J) - |J| + |C|$  .

#### 4 層混合行列の階数アルゴリズムの詳細

アルゴリズムは下のようになる ( 記号などの詳しいことは [1, §4.2.4] 参照 ) .

##### Algorithm for computing the rank of an LM-matrix $A$

###### Step 1:

$$M^\circ := \emptyset; \quad \text{base}[i] := 0 \ (i \in R_Q); \quad P[i, j] := Q_{ij} \ (i \in R_Q, j \in C);$$

$$S := \text{unit matrix of order } m_Q.$$

###### Step 2:

$$I := \{i \in C \mid i_Q \in \partial^- M^\circ \cap C_Q\};$$

$$J := \{j \in C \setminus I \mid \forall h : \text{base}[h] = 0 \Rightarrow P[h, j] = 0\};$$

$$S_T^+ := R_T \setminus \partial^- M^\circ; \quad S_Q^+ := \{j_Q \in C_Q \mid j \in C \setminus (I \cup J)\};$$

$$S^+ := S_T^+ \cup S_Q^+; \quad S^- := C \setminus \partial^+ M^\circ;$$

$$E^+ := \{(i_Q, j_Q) \mid h \in R_Q, j \in J, P[h, j] \neq 0, i = \text{base}[h] \neq 0\};$$

[ $\tilde{E}$  is updated accordingly]

If there exists in  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  a directed path from  $S^+$  to  $S^-$  then go to Step 3; otherwise (including the case where  $S^+ = \emptyset$  or  $S^- = \emptyset$ ) stop with the conclusion that  $\text{rank } A = |M^\circ|$ .

###### Step 3:

Let  $L (\subseteq \tilde{E})$  be (the set of arcs on) a shortest path from  $S^+$  to  $S^-$  (“shortest” in the number of arcs);

$$M^\circ := (M^\circ \setminus L) \cup \{(j, i) \mid (i, j) \in L \cap E_T\} \cup \{(j, j_Q) \mid (j_Q, j) \in L \cap E_Q\};$$

If the initial vertex ( $\in S^+$ ) of the path  $L$  belongs to  $S_Q^+$ , then do the following:

{Let  $j_Q (\in S_Q^+ \subseteq C_Q)$  be the initial vertex;

Find  $h$  such that  $\text{base}[h] = 0$  and  $P[h, j] \neq 0$ ;

[ $j \in C$  corresponds to  $j_Q \in C_Q$ ]

$$\text{base}[h] := j; \quad w := 1/P[h, j];$$

$$P[k, l] := P[k, l] - w \times P[k, j] \times P[h, l] \quad (k \in R_Q \setminus \{h\}, l \in C \setminus \{j\});$$

$$S[k, l] := S[k, l] - w \times P[k, j] \times S[h, l] \quad (k \in R_Q \setminus \{h\}, l \in R_Q);$$

$$P[k, j] := 0 \quad (k \in R_Q \setminus \{h\});$$

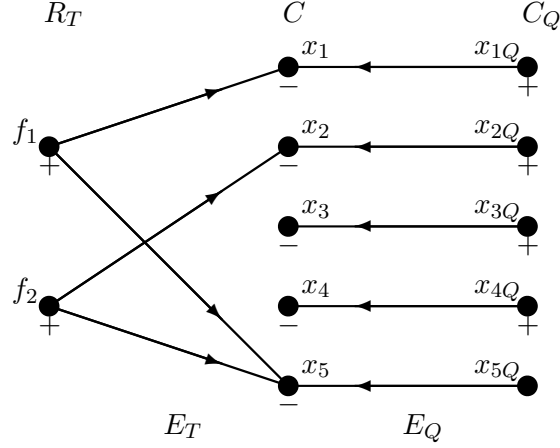


図 5: Graph  $\tilde{G}^{(0)}$  (+: vertex in  $S^+$ ; -: vertex in  $S^-$ )

For all  $(i_Q, j_Q) \in L \cap E^+$  (in the order from  $S^+$  to  $S^-$  along  $L$ ) do the following:

$$\begin{aligned} & \{\text{Find } h \text{ such that } i = \text{base}[h]; & [j \in C \text{ corresponds to } j_Q \in C_Q] \\ & \text{base}[h] := j; \quad w := 1/P[h, j]; \\ & P[k, l] := P[k, l] - w \times P[k, j] \times P[h, l] \quad (k \in R_Q \setminus \{h\}, l \in C \setminus \{j\}); \\ & S[k, l] := S[k, l] - w \times P[k, j] \times S[h, l] \quad (k \in R_Q \setminus \{h\}, l \in R_Q); \\ & P[k, j] := 0 \quad (k \in R_Q \setminus \{h\}); \end{aligned}$$

Go to Step 2.

例 5 例 2 の行列について , アルゴリズムの動きを示す .

Step 1:  $M^\circ := \emptyset$ ;

$$\text{base} := \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P := \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad S := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

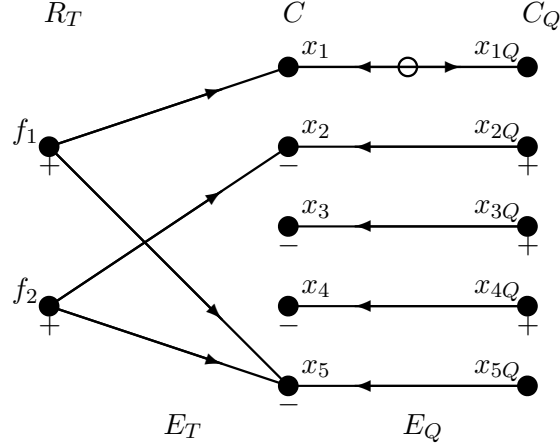
Step 2:  $I := \emptyset$ ;  $J := \{x_5\}$ ;

$$\begin{aligned} S_T^+ &:= \{f_1, f_2\}; \quad S_Q^+ := \{x_{1Q}, x_{2Q}, x_{3Q}, x_{4Q}\}; \\ S^+ &:= \{f_1, f_2, x_{1Q}, x_{2Q}, x_{3Q}, x_{4Q}\}; \quad S^- := \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}; \\ E^+ &:= \emptyset; \end{aligned}$$

There exists a path from  $S^+$  to  $S^-$ .

[  $\implies \tilde{G}^{(0)}$ , 図 5 ]

Step 3:  $L := \{(x_{1Q}, x_1)\}$ ;  $M^\circ := \{(x_1, x_{1Q})\}$ ;



⊠ 6: Graph  $\tilde{G}^{(1)}$  (○: arc in  $M$ ; +: vertex in  $S^+$ ; -: vertex in  $S^-$ )

The initial vertex  $x_{1Q}$  of  $L$  is in  $S_Q^+$ , and the matrices are updated (with  $h = r_1$ ) to

$$base := \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P := \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Noting  $L \cap E^+ = \emptyset$  we return to Step 2.

**Step 2:**  $I := \{x_1\}$ ;  $J := \{x_5\}$ ;

$$S_T^+ := \{f_1, f_2\}; S_Q^+ := \{x_{2Q}, x_{3Q}, x_{4Q}\}; S^+ := \{f_1, f_2, x_{2Q}, x_{3Q}, x_{4Q}\};$$

$$S^- := \{x_2, x_3, x_4, x_5\};$$

$$E^+ := \emptyset;$$

There exists a path from  $S^+$  to  $S^-$ . [  $\implies \tilde{G}^{(1)}$ , ⊠ 6 ]

**Step 3:**  $L := \{(x_{2Q}, x_2)\}$ ;  $M^\circ := \{(x_1, x_{1Q}), (x_2, x_{2Q})\}$ ;

The initial vertex  $x_{2Q}$  of  $L$  is in  $S_Q^+$ , and the matrices are updated (with  $h = r_2$ ) to

$$base := \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad P := \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S := \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

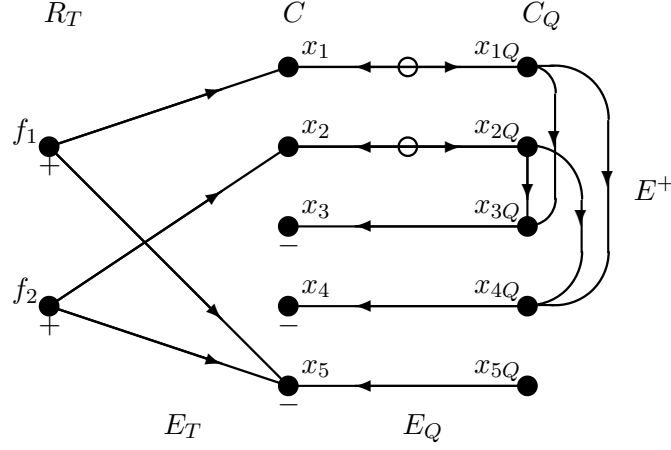
Noting  $L \cap E^+ = \emptyset$  we return to Step 2.

**Step 2:**  $I := \{x_1, x_2\}$ ;  $J := \{x_3, x_4, x_5\}$ ;

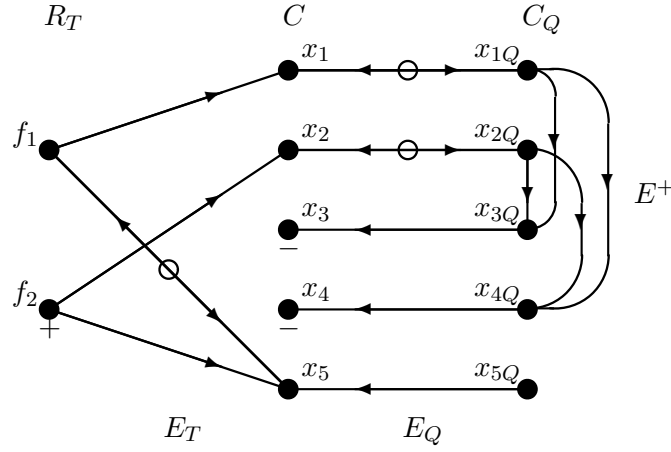
$$S_T^+ := \{f_1, f_2\}; S_Q^+ := \emptyset; S^+ := \{f_1, f_2\}; S^- := \{x_3, x_4, x_5\};$$

$$E^+ := \{(x_{1Q}, x_{3Q}), (x_{1Q}, x_{4Q}), (x_{2Q}, x_{3Q}), (x_{2Q}, x_{4Q})\};$$

There exists a path from  $S^+$  to  $S^-$ . [  $\implies \tilde{G}^{(2)}$ , ⊠ 7 ]



⊠ 7: Graph  $\tilde{G}^{(2)}$  (○: arc in  $M$ ; +: vertex in  $S^+$ ; -: vertex in  $S^-$ )



⊠ 8: Graph  $\tilde{G}^{(3)}$  (○: arc in  $M$ ; +: vertex in  $S^+$ ; -: vertex in  $S^-$ )

**Step 3:**  $L := \{(f_1, x_5)\}$ ;  $M^\circ := \{(x_1, x_{1Q}), (x_2, x_{2Q}), (x_5, f_1)\}$ ;

The initial vertex  $f_1 \notin S_Q^+$  and  $L \cap E^+ = \emptyset$ , and therefore the matrices remain unchanged and we return to Step 2.

**Step 2:**  $I := \{x_1, x_2\}$ ;  $J := \{x_3, x_4, x_5\}$ ;

$S_T^+ := \{f_2\}$ ;  $S_Q^+ := \emptyset$ ;  $S^+ := \{f_2\}$ ;  $S^- := \{x_3, x_4\}$ ;

$E^+ := \{(x_{1Q}, x_{3Q}), (x_{1Q}, x_{4Q}), (x_{2Q}, x_{3Q}), (x_{2Q}, x_{4Q})\}$ ;

There exists a path from  $S^+$  to  $S^-$ .

[  $\implies \tilde{G}^{(3)}$ , ⊠ 8 ]

**Step 3:**  $L := \{(f_2, x_2), (x_2, x_{2Q}), (x_{2Q}, x_{3Q}), (x_{3Q}, x_3)\}$ ;

$M^\circ := \{(x_1, x_{1Q}), (x_3, x_{3Q}), (x_5, f_1), (x_2, f_2)\}$ ;



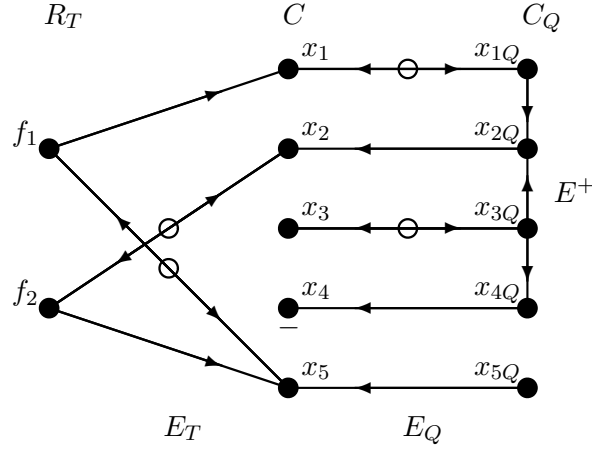


図 9: Graph  $\tilde{G}^{(4)}$  ( $\circ$ : arc in  $M$ ;  $S^+ = \emptyset$ ,  $-$ : vertex in  $S^-$ )

The initial vertex  $f_2 \notin S_Q^+$  and  $L \cap E^+ = \{(x_{2Q}, x_{3Q})\}$ , and the matrices are updated (with  $h = r_2$ ) to

$$base := \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad P := \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Step 2:**  $I := \{x_1, x_3\}$ ;  $J := \{x_2, x_4, x_5\}$ ;

$S_T^+ := \emptyset$ ;  $S_Q^+ := \emptyset$ ;  $S^+ := \emptyset$ ;  $S^- := \{x_4\}$ ;

$E^+ := \{(x_{1Q}, x_{2Q}), (x_{3Q}, x_{2Q}), (x_{3Q}, x_{4Q})\}$ ;

There exists no path from  $S^+ (= \emptyset)$  to  $S^-$ ;

We stop with the conclusion that  $\text{rank } A = |M^\circ| = 4$ .

[  $\implies \tilde{G}^{(4)}$ , 図 9 ]

## 参考文献

- [1] K. Murota: *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2000. (工学部6号館256号室にはあります)

以上