

応用数理学：レポート課題 2

室田一雄 (vers. 2005-07-01; 2005-07-09)

混合行列と層混合行列の階数に関する，次の2つの定理について考える．

定理 1 ([1, p.141, Theorem 4.2.13] : Let $A = Q + T$ be a mixed matrix. Then there exist $I \subseteq R$ and $J \subseteq C$ such that

- (i) $|I| + |J| - \text{rank } Q[I, J] = |R| + |C| - \text{rank } A$,
- (ii) $\text{rank } T[I, J] = 0$.

定理 2 ([1, p.138, Theorem 4.2.5] : For an LM-matrix $A = \begin{pmatrix} Q \\ T \end{pmatrix}$, it holds that

$$\text{rank } A = \min\{\rho(J) + \gamma(J) - |J| \mid J \subseteq C\} + |C|,$$

where

$$\begin{aligned} \rho(J) &= \text{rank } Q[R_Q, J], & J \subseteq C, \\ \Gamma(J) &= \{i \in R_T \mid \exists j \in J : T_{ij} \neq 0\}, & J \subseteq C, \\ \gamma(J) &= |\Gamma(J)|, & J \subseteq C. \end{aligned}$$

上の2つの定理が本質的に等価であることを理解するのが，このレポートの目的である．
一般に， $m \times n$ 混合行列 $A = Q + T$ に対して， $(2m) \times (m+n)$ 層混合行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{Q} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & Q \\ -\text{diag}[t_1, \dots, t_m] & T \end{pmatrix}$$

を対応させることにより，層混合行列に関する結果から混合行列に関する結果が導かれる．

問題 1 $\text{rank } \tilde{A} = m + \text{rank } A$ を示せ．

問題 2 定理 1 を

$$A = \begin{pmatrix} 2 + \alpha & 3 \\ \beta & 4 + \gamma \end{pmatrix}$$

に適用して，(i), (ii) を満たす (I, J) をすべて求めよ．

問題 3 定理 2 を

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -t_1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -t_2 & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

に適用して最小化元 J をすべて求めよ．さらに，問題 2 の答えと比較せよ．

問題 4 混合行列 $A = Q + T$ と $I \subseteq R$, $J \subseteq C$ に対して， $\text{rank } T[I, J] = 0$ ならば，

$$|I| + |J| - \text{rank } Q[I, J] \leq |R| + |C| - \text{rank } A$$

であることを示せ．

問題 5 層混合行列 $A = \begin{pmatrix} Q \\ T \end{pmatrix}$ と $J \subseteq C$ に対して,

$$\text{rank } A \leq \rho(J) + \gamma(J) - |J| + |C|$$

であることを示せ.

問題 6 定理 1 から定理 2 を導こう. 層混合行列 $A = \begin{pmatrix} Q \\ T \end{pmatrix}$ が与えられたとき, 混合行列 $A = \begin{pmatrix} Q \\ O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ T \end{pmatrix}$ に定理 1 を適用して, (i), (ii) を満たす (I, J) をとる.

- (1) $I \supseteq R_Q$ と仮定してよいことを示せ.
- (2) $\rho(J) = \text{rank } Q[I, J]$ を示せ.
- (3) $\gamma(J) \leq |R \setminus I|$ を示せ.
- (4) $\text{rank } A \geq \rho(J) + \gamma(J) - |J| + |C|$ を示せ.

問題 7 定理 2 から定理 1 を導こう. 混合行列 $A = Q + T$ が与えられたとき, 層混合行列 \tilde{A} に定理 2 を適用して, $\tilde{J} \subseteq R \cup C$ をとる. $I = R \setminus \tilde{J}$, $J = C \cap \tilde{J}$ とおく.

- (1) $\tilde{\rho}(\tilde{J}) = \text{rank } Q[I, J] + |R \setminus I|$ を示せ.
- (2) $I \cap \Gamma(J) = \emptyset$ と仮定してよいことを示せ.
- (3) $\text{rank } T[I, J] = 0$ を示せ.
- (4) $|I| + |J| - \text{rank } Q[I, J] \geq |R| + |C| - \text{rank } A$ を示せ.

締切: 2005 年 7 月 20 日 (水)

提出先: 室田の郵便受 (工学部 6 号館 1 階廊下)

用紙: A4 判 (ホッチキスで綴じる)

当然ですが, 名前, 所属, 学年, 学生証番号, email アドレスを書くこと

参考文献

- [1] K. Murota: *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2000. (工学部 6 号館 256 号室にはあります)

以上