最良近似多項式の存在と一意性 (Advanced Topic)

一様ノルムに関する関数近似の問題について，近似関数の存在，一意性，特徴づけなどの基本事実を述べる．

与えられた関数 $f(x)$ を多項式 $P(x)$ で近似する問題を考える．関数 f は有限な閉区間 $[a,b]$ 上で定義された連続関数とし，近似の度合は誤差の**一様ノルム**

$$||f-P||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-P(x)| \tag{1}$$

で測るものとする．$P(x)$ の次数を n 以下に限るとき，近似誤差 (1) をできるだけ小さくするのがここでの近似問題である．区間 $[a,b]$ 上の連続関数の全体を $\mathrm{C}[a,b]$，実係数 n 次多項式の全体を $\mathcal{P}_n$ と記し，$f\notin\mathcal{P}_n$，$f\in\mathrm{C}[a,b]$ とする．有界閉区間上の連続関数は最大値をもつという事実により，一様ノルムに関して

$$||g||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| = \max_{x\in[a,b]} |g(x)|, \qquad g\in\mathrm{C}[a,b] \tag{2}$$

が成り立つことを注意しておく．

近似誤差の下限

$$E_n = E_n(f) = \inf_{P\in\mathcal{P}_n} ||f-P||_\infty \tag{3}$$

を与える $P=P^*\in\mathcal{P}_n$ を f の n 次**最良近似多項式**，あるいは単に**最良近似式**と呼ぶ．そもそも最良近似式は存在するのか，すなわち，近似誤差の下限 (3) が $\mathcal{P}_n$ の中で達成されるのか，がまず問題となるが，以下に述べるように，

●最良近似式は一意的に存在し (定理 3，定理 6)，

●それは (1) の右辺の最大値を与える点 x の分布によって特徴付けられる (定理 5)．

実係数 n 次多項式 $P(x)\in\mathcal{P}_n$ は，$n+1$ 個の実数の組 $(a_0,a_1,\dots,a_n)=\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^{n+1}$ によって

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \tag{4}$$

と表現されるので，$\mathcal{P}_n$ と $\mathbf{R}^{n+1}$ の間には 1 対 1 対応 $\varphi : P\mapsto\boldsymbol{a}$ がある．一方，$\mathcal{P}_n$ の上には (2) の一様ノルム $||\cdot||_\infty$ によって “距離” の概念が定義され，$\mathbf{R}^{n+1}$ の上には通常の Euclid 距離 $||\cdot||_2$ がある．次の補題は，この対応 φ が近さの概念も保存していることを示している．

補題 1: 二つのノルム空間 $(\mathcal{P}_n, ||\cdot||_\infty)$，$(\mathbf{R}^{n+1}, ||\cdot||_2)$ は位相同型である．

[証明] φ が 1 対 1 の線形写像であることは明らかであるから，

(i) ある $A>0$ が存在して $||\varphi(P)||_2 \le A||P||_\infty$，

(ii) ある $B>0$ が存在して $||\varphi^{-1}(\boldsymbol{a})||_\infty \le B||\boldsymbol{a}||_2$

を示せばよい．(i) については，区間 $[a,b]$ 内に相異なる $n+1$ 個の点 x_k $(k=1,\ldots,n+1)$ を固定すると，$\boldsymbol{a}$ は連立 1 次方程式

$$\sum_{j=0}^{n} a_j {x_k}^j = P(x_k) \qquad (k=1,\ldots,n+1)$$

から定まるので，$a_j = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{jk} P(x_k)$ $(j=0,1,\ldots,n)$ と書ける．したがって，

$$||\varphi(P)||_2 = ||\boldsymbol{a}||_2 \leq \left(\sum_{j=0}^{n} (\sum_{k=1}^{n+1} |\alpha_{jk}|)^2 \right)^{1/2} ||P||_\infty.$$

(ii) については，

$$||\varphi^{-1}(\boldsymbol{a})||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |\sum_{j=0}^{n} a_j x^j| \leq \max_{x\in[a,b]} \left(\sum_{j=0}^{n} x^{2j} \right)^{1/2} ||\boldsymbol{a}||_2.$$

(証終)

補題 2: $\mathcal{P}_n$ における有界列は収束部分列をもつ．

[証明] $\{P^{(\nu)}\}_\nu$ を $\mathcal{P}_n$ における有界列とする．補題 1 により，$\{\varphi(P^{(\nu)})\}$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ における有界列であるから，Bolzano–Weierstrass の定理により，収束部分列 $\{\varphi(P^{(\nu_i)})\}_i$ をもつ．その収束先を $\boldsymbol{a}^* \in \mathbf{R}^{n+1}$ とすると，再び補題 1 により，$\{P^{(\nu_i)}\}_i$ は $P^* = \varphi^{-1}(\boldsymbol{a}^*) \in \mathcal{P}_n$ に収束する．(証終)

この対応 $\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathbf{R}^{n+1}$ と実数の性質から最良近似の存在が導かれる．

定理 3: 任意の連続関数 f に対して n 次最良近似式 P^* が存在する，すなわち，近似誤差の下限 (3) を達成する $P^* \in \mathcal{P}_n$ が存在する．

[証明] 下限の定義により，

$$E_n(f) \leq ||f - P^{(\nu)}||_\infty \leq E_n(f) + 1/\nu \qquad (\nu = 1,2,\cdots)$$

を満たす n 次多項式の列 $\{P^{(\nu)}\}_{\nu=1}^\infty$ が存在する．このとき

$$||P^{(\nu)}||_\infty \leq ||f - P^{(\nu)}||_\infty + ||f||_\infty \leq E_n(f) + 1 + ||f||_\infty$$

が成り立ち，$\{P^{(\nu)}\}$ は有界である．したがって，補題 2 により，$\{P^{(\nu)}\}$ は収束部分列 $\{P^{(\nu_i)}\}_i$ をもち，その収束先を P^* とすると $E_n(f) = ||f - P^*||_\infty$ である．(証終)

近似誤差の定義により，任意の $P \in \mathcal{P}_n$ に対して

$$E_n(f) \leq ||f - P||_\infty \tag{5}$$

が成り立ち，$P = P^*$ に対してある $x = \xi^*$ が存在して $E_n(f) = |f(\xi^*) - P(\xi^*)|$ となる．これに対し，次の補題 4 は，任意に選んだ多項式 P の値を用いて $E_n(f)$ の下からの評価を与えており，最良近似式の特徴付け (定理 5) や構成算法の基礎となる．

区間 $[a,b]$ 内の狭義単調増加列 $(a \le)\ \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{r-1}\ (\le b)$ に対して $f(\xi_i) - P(\xi_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, r-1)$ が交互に符号を変えるとき，$\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{r-1})$ を ((f, P) に対する) 長さ r の**交代点列**と呼ぶことにする．長さ r の交代点列の全体を

$$\begin{aligned}\Xi(P) &= \Xi_r(f,P)\\ &= \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{r-1}) \mid a \le \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{r-1} \le b,\\ &\qquad (f(\xi_i) - P(\xi_i)) \cdot (f(\xi_{i+1}) - P(\xi_{i+1})) < 0\ (i = 0, 1, \ldots, r-2)\}\end{aligned} \tag{6}$$

とおく ($\Xi(P)$ は空集合の可能性がある)．さらに，

$$\Phi(P, \boldsymbol{\xi}) = \Phi(f, P, \boldsymbol{\xi}) = \min_{0 \le i \le r-1} |f(\xi_i) - P(\xi_i)| \tag{7}$$

と定義すると，次の評価が成り立つ．

補題 4: $P \in \mathcal{P}_n$，$\boldsymbol{\xi} \in \Xi_{n+2}(f, P)$ ならば

$$\Phi(f, P, \boldsymbol{\xi}) \le E_n(f). \tag{8}$$

[証明] (8) が成り立たないとすると，$||f - \widetilde{P}||_\infty < \Phi(P, \boldsymbol{\xi})$ を満たす $\widetilde{P} \in \mathcal{P}_n$ がある．このとき $P - \widetilde{P} = (P - f) + (f - \widetilde{P})$ の ξ_i における符号は $P - f$ のそれと一致するから，$n+2$ 個の引き続く点で交互に正と負になる．したがって，$P - \widetilde{P}$ は $n+1$ 個の点で 0 となる．$P - \widetilde{P}$ は n 次以下の多項式だから $P = \widetilde{P}$．すると $||f - P||_\infty < \Phi(P, \boldsymbol{\xi}) \le ||f - P||_\infty$ となり矛盾．(証終)

近似誤差 $|f(x) - P(x)|$ の最大値を与える点，すなわち

$$|f(\xi) - P(\xi)| = ||f - P||_\infty \tag{9}$$

を満たす点 $x = \xi$ を**偏差点** (deviation point)，$f(\xi) - P(\xi)$ の符号を偏差点 ξ の**符号**と呼ぶ．交代点列 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{r-1})$ の各点 ξ_i が偏差点であるとき，これを**交代偏差点列**ということにする．次の定理は**交代定理**と呼ばれ，最良近似式の特徴付けを与えている．

定理 5 (交代定理): $P^* \in \mathcal{P}_n$ が最良近似式であるためには，長さ $n+2$ の交代偏差点列 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) \in \Xi_{n+2}(f, P^*)$ が存在することが必要十分である．

[証明] (十分性) $\boldsymbol{\xi} \in \Xi(P^*)$ であるから，補題 4 と (5) により $\Phi(P^*, \boldsymbol{\xi}) \le E_n(f) \le ||f - P^*||_\infty$．一方，$\boldsymbol{\xi}$ の各成分が (9) を満たすので，$\Phi(P^*, \boldsymbol{\xi}) = ||f - P^*||_\infty$．したがって，$E_n(f) = ||f - P^*||_\infty$．

(必要性) 最小の偏差点を $\xi_0\ (\ge a)$ とし，その符号を $s_0\ (= \pm 1)$ とする．ξ_0 より大きい異符号の偏差点が $[a,b]$ 内にあれば，その最小のものを ξ_1 とし，ξ_1 より小さい最大の偏差点を ξ_0' とする (ξ_0' は ξ_0 と同符号の偏差点であり，ξ_0 に一致する可能性もある)．一般に $i = 0, 1, \cdots$ に対して，半開区間 $(\xi_i, b]$ 内に ξ_i と異符号の偏差点が存在しなければ終了; 存

在すれば，その最小のものを ξ_{i+1} とし，さらに，半開区間 $[\xi_i, \xi_{i+1})$ 内の最大の偏差点を ξ'_i とする．

この手続きが $i = m \le n$ で終了するとして矛盾を導けばよい．この手続きが終了したとき，偏差点の列 $(a \le)\ \xi_0 \le \xi'_0 < \xi_1 \le \xi'_1 < \cdots < \xi_m\ (\le b)$ が定まっている $(m \ge 0)$．$f - P^*$ は連続だから，中間値の定理により，$\xi'_{i-1} < t_i < \xi_i$ を満たす t_i が存在する $(i = 1, \ldots, m)$．さらに，$t_0 = a$，$t_{m+1} = b$,

$$K(x) = s_0 \prod_{i=1}^{m} (t_i - x) \qquad (\text{ただし } m = 0 \text{ のときは } K(x) = s_0)$$

とおく．$0 \le i \le m$ のとき，区間 (t_i, t_{i+1}) で $K(x)$ の符号は一定で偏差点 ξ_i の符号に一致し，一方， ある $\Delta_i > 0$ が存在して，この区間 (t_i, t_{i+1}) 上で

$$-E_n + \Delta_i \le (-1)^i s_0 (f(x) - P^*(x)) \le E_n$$

である．したがって,

$$0 < \lambda < \min_{0 \le i \le m} \Delta_i / ||K||_\infty$$

を満たす λ をとると，任意の $x \in [a, b]$ に対して

$$-E_n < (-1)^i s_0 (f(x) - P^*(x) - \lambda K(x)) < E_n,$$

すなわち，$||f - (P^* + \lambda K)||_\infty < E_n$ が成り立つ．$P^* + \lambda K \in \mathcal{P}_n$ だから，これは (5) に矛盾する．(証終)

定理 6: 最良近似多項式 $P^* \in \mathcal{P}_n$ は一意的に定まる．

[証明] $P_1^*, P_2^* \in \mathcal{P}_n$ がともに最良近似であるとすると,

$$E_n(f) \le ||f - \frac{1}{2}(P_1^* + P_2^*)||_\infty \le \frac{1}{2}(||f - P_1^*||_\infty + ||f - P_2^*||_\infty) = E_n(f)$$

により，$(P_1^* + P_2^*)/2$ も最良近似である．交代定理により,

$$f(\xi_i) - (P_1^*(\xi_i) + P_2^*(\xi_i))/2 = (-1)^i \delta$$

(ただし $|\delta| = E_n(f)$) を満たす増加列 $\{\xi_i\}_{i=0}^{n+1}$ がある．このとき,

$$f(\xi_i) - P_1^*(\xi_i) = f(\xi_i) - P_2^*(\xi_i) = (-1)^i \delta \qquad (i = 0, 1, \ldots, n+1)$$

となり，ふたつの n 次多項式 P_1^*，P_2^* が $n+2$ 点で同じ値をとる．ゆえに，$P_1^* = P_2^*$．(証終)

さらに，つぎの定理が知られている．

定理 7 (Weierstrass の定理): $f \in \mathrm{C}[a, b]$ ならば $\lim_{n \to \infty} E_n(f) = 0$．すなわち，連続関数は多項式によっていくらでも良く一様に近似できる．

出典：杉原正顯, 室田一雄，数値計算法の数理, §8.1, 岩波書店, 1994.

以上 (2013-08-05)