2003-11-03

凸解析の基礎

凸解析について，和書としては [1] を奨める．この資料は，室田一雄: 離散凸解析，共立出版, 2001 の 1.2 節に改訂を加えたものである．

凸解析における基本概念を説明する．関数値が $\pm\infty$ となる可能性を許すこととし，関数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対して，

$$\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbf{R}^n \mid -\infty < f(x) < +\infty\} \tag{1}$$

を f の**実効定義域**と呼ぶ．また，ベクトル $a, b \in (\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\})^n$ に対し，実数の**区間** $[a, b]$ (あるいは $[a, b]_{\mathbf{R}}$ とも書く) を

$$[a, b] = [a, b]_{\mathbf{R}} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \ (i = 1, \cdots, n)\} \tag{2}$$

と定義する (a, b の成分に $\pm\infty$ がある場合の不等式の意味は明らかであろう)．

関数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が**凸関数**であるとは，f が不等式

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n; 0 \leq \lambda \leq 1) \tag{3}$$

を満たすことである (図 1 参照)．凸関数の値として $-\infty$ を排除していること，および，不等式 (3) において $+\infty \geq +\infty$ と約束していることに注意されたい．なお，実効定義域 $\mathrm{dom}\, f$ が空集合でないような凸関数 f を**真凸関数**と呼ぶ．また，(3) における不等号から等号の場合を除外した条件

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) > f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n; 0 < \lambda < 1) \tag{4}$$

を満たす関数 f を**狭義凸関数**と呼ぶ． 2 次関数 $f(x) = \frac{1}{2} x^\top A x$ (A は対称行列) については，

$$\begin{array}{rcl} f \text{ が凸関数} & \Longleftrightarrow & A \text{ が半正定値} \\ f \text{ が狭義凸関数} & \Longleftrightarrow & A \text{ が正定値} \end{array}$$

である．

関数 $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は，$-h$ が凸関数のとき，すなわち，

$$\lambda h(x) + (1 - \lambda) h(y) \leq h(\lambda x + (1 - \lambda) y) \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n; 0 \leq \lambda \leq 1) \tag{5}$$

を満たすとき，**凹関数**と呼ばれる．

集合 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ が**凸集合**であるとは，S が条件

$$x, y \in S,\ 0 \leq \lambda \leq 1 \Longrightarrow \lambda x + (1 - \lambda) y \in S \tag{6}$$

を満たすことと定義される (図 2 参照)．直感的には，くびれのない集合が凸集合であり，とくに，凸集合は穴のあいていない集合である．なお，空集合は凸集合である．

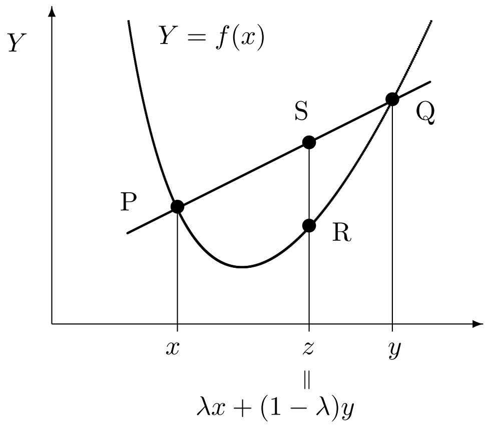

図 1: 凸関数の定義

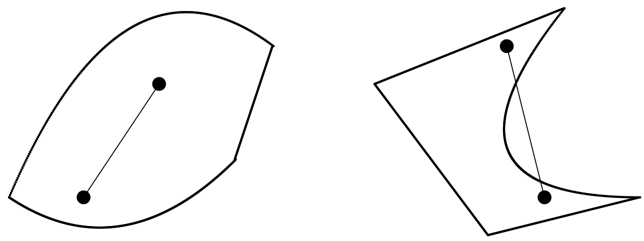

図 2: 凸集合　と　凸でない集合

集合 S が条件

$$x \in S,\ \lambda > 0 \Longrightarrow \lambda x \in S \tag{7}$$

を満たすとき，S は**錐**であるという．凸集合である錐を**凸錐**という．S が凸錐を成すための必要十分条件は，

$$x, y \in S,\ \lambda, \mu > 0 \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in S \tag{8}$$

で与えられる．有限個の１次不等式で規定される集合

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i\ (i = 1, \ldots, m)\} \tag{9}$$

(ただし $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $b_i \in \mathbf{R}$) は**凸多面体**と呼ばれる典型的な凸集合である．ここで $b_i = 0\ (i = 1, \ldots, m)$ のとき，S は凸錐である．

集合 S の有限個の点 $x_1, \cdots, x_m$ に対し，

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m \qquad (\text{ただし } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\ (1 \leq i \leq m)) \tag{10}$$

の形の表現をこれらの点の**凸結合**と呼ぶ． S が凸集合ならば，S の点の任意の凸結合は S に属する．凸とは限らない集合 S に対して，S を含むすべての凸集合の共通部分は S を含む最小の凸集合である．これを S の**凸包**と呼ぶ．S の凸包は，S の有限個の点の凸結合の全体に等しい．S の凸包は閉集合とは限らないが，集合 S を含む最小の閉凸集合を S の**閉凸包**と呼ぶ．S が有限集合ならば，S の凸包は閉凸包に一致する．

凸集合 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ を含む最小のアフィン集合 (線形空間を平行移動したもの) を S の**アフィン包**と呼び，$\mathrm{aff}\, S$ と表す．S の**相対的内点**を，$\{y \in \mathbf{R}^n \mid \|y - x\| < \varepsilon\} \cap \mathrm{aff}\, S \subseteq S$ となる $\varepsilon > 0$ が存在するような点 $x \in S$ (すなわち，$\mathrm{aff}\, S$ から誘導される相対位相に関する内点) と定義する．S の相対的内点の集合を S の**相対的内部**と呼び，$\mathrm{ri}\, S$ と表す．

凸集合と凸関数の間には密接な関係がある．集合 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ に対し，その**標示関数** $\delta_S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$\delta_S(x) = \begin{cases} 0 & (x \in S) \\ +\infty & (x \notin S) \end{cases} \tag{11}$$

と定義すると，

$$S \text{ が凸集合} \iff \delta_S \text{ が凸関数} \tag{12}$$

が成り立つ．したがって，凸集合の概念は凸関数の概念を用いて (12) によって定義することができる．逆に，凸集合の概念から凸関数の概念を定義することもできる．グラフ $Y = f(x)$ の上側の集合を**エピグラフ**と呼び，記号

$$\mathrm{epi}\, f = \{(x, Y) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid Y \geq f(x)\} \tag{13}$$

で表すと，上の定義 (3), (6) の下で

$$f \text{ が凸関数} \iff \mathrm{epi}\, f \text{ が凸集合} \tag{14}$$

が成り立つ．したがって，この関係を凸関数の定義とすることができる．なお，$\mathrm{epi}\, f$ が $\mathbf{R}^{n+1}$ の閉集合であるような凸関数 f を**閉凸関数**と呼ぶ．

凸関数の族 $\{f_i \mid i \in I\}$ に対して，各点毎の最大値として定義される関数 $f(x) = \sup\{f_i(x) \mid i \in I\}$ は凸関数である．ここで，添字集合 I は無限集合でもよい．とくに，有限または無限個の 1 次関数の最大値として書ける関数は凸関数である．

関数 f のエピグラフ $\mathrm{epi}\, f$ が $\mathbf{R}^{n+1}$ の凸多面体であるとき，f を**多面体的凸関数**と呼ぶ．関数 f が多面体的凸関数であるためには，実効定義域 $\mathrm{dom}\, f$ が凸多面体であって，f が $\mathrm{dom}\, f$ 上で有限個の 1 次関数の最大値として書けることが必要十分である．このとき，$\mathrm{dom}\, f$ は有限個の凸多面体に分割されて，各多面体上で f は 1 次関数となっている．1 変数 ($n = 1$) の場合の多面体的凸関数は，(有限または無限) 区間上の凸な折れ線関数である (直線分の個数は有限).

関数 f の最小値をあたえる点の集合を**最小値集合**と呼び，$\arg\min f$ という記号で表す．すなわち，

$$\arg\min f = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \leq f(y)\ (\forall y \in \mathbf{R}^n)\} \tag{15}$$

である．式 (3) から容易に分かるように，f が凸関数ならば $\arg\min f$ は凸集合である．ベクトル $p \in \mathbf{R}^n$ によって定まる線形関数を f から引いた関数を $f[-p]$ と書くことにする．すなわち，$p = (p_i)_{i=1}^n$ と $x = (x_i)_{i=1}^n$ の内積[1)]を

$$\langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{16}$$

として

$$f[-p](x) = f(x) - \langle p, x \rangle \qquad (x \in \mathbf{R}^n) \tag{17}$$

である．f が凸関数ならば $f[-p]$ も凸関数であり，したがって，$\arg\min f[-p]$ は凸集合である．

任意の関数 f と点 $x \in \mathrm{dom}\, f$ に対して，

$$\partial_{\mathbf{R}} f(x) = \{p \in \mathbf{R}^n \mid f(y) - f(x) \geq \langle p, y - x \rangle\ (\forall y \in \mathbf{R}^n)\} \tag{18}$$

で定義される集合を，f の点 x における**劣微分**と呼ぶ．$\partial_{\mathbf{R}} f(x)$ は半空間の族 (y を添字とみる) の共通部分として定義されているから凸集合である．f が凸関数で x が $\mathrm{dom}\, f$ の相対的内点ならば $\partial_{\mathbf{R}} f(x)$ は空でないことが知られている．$\partial_{\mathbf{R}} f(x)$ の要素 p は**劣勾配**と呼ばれる．f が凸関数で x において微分可能ならば，劣微分はただ一つの劣勾配からなる集合となり，その劣勾配は勾配 $\nabla f(x) = (\partial f / \partial x_i)_{i=1}^n$ に一致する．

任意の関数 f, 点 $x \in \mathrm{dom}\, f$, 方向 $d \in \mathbf{R}^n$ に対して，(片側) **方向微分**を

$$f'(x; d) = \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} \tag{19}$$

と定義する．ここで $\alpha \searrow 0$ は α が正の側から 0 に近づくことを表す．f が凸関数ならば $f'(x; d)$ が存在し，d を変数とする関数 $f'(x; \cdot) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は凸関数となる．f が多面体的凸関数ならば，各 $x \in \mathrm{dom}\, f$ に対して，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，

$$f'(x; d) = f(x + d) - f(x) \qquad (||d||_\infty \leq \varepsilon) \tag{20}$$

が成り立つ．

関数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ (凸とは限らないが $\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$ とする) に対し，

$$f^\bullet(p) = \sup\{\langle p, x \rangle - f(x) \mid x \in \mathbf{R}^n\} \qquad (p \in \mathbf{R}^n) \tag{21}$$

[1)] p と x は互いに他の双対空間に属するので，正確には，内積ではなく pairing である．

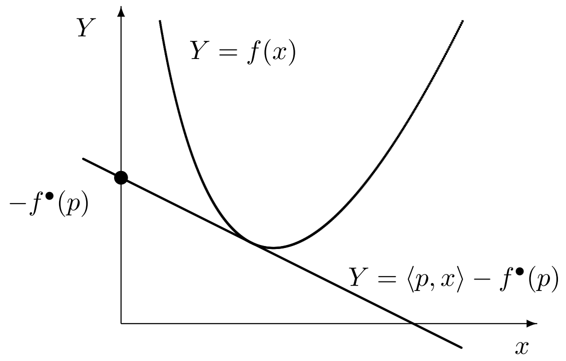

図 3: 共役関数 (Legendre–Fenchel 変換)

で定義される関数 $f^{\bullet} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を f の **(凸) 共役関数**と呼ぶ．$f^{\bullet}$ は１次関数の族 (p を変数，x を添字とみる) の各点毎の最大値として定義されているから凸関数である．同様に，関数 $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ の **(凹) 共役関数** $h^{\circ} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を

$$h^{\circ}(p) = \inf\{\langle p, x \rangle - h(x) \mid x \in \mathbf{R}^n\} \qquad (p \in \mathbf{R}^n) \tag{22}$$

と定義する．$h^{\circ}(p) = -(-h)^{\bullet}(-p)$ である．

関数 f が滑らかな凸関数で，各 p に対して式 (21) における sup を達成する $x = x(p)$ が存在する場合には, $x = x(p)$ は方程式 $\nabla f(x) = p$ の解として定まり，

$$f^{\bullet}(p) = \langle p, x(p) \rangle - f(x(p)) \tag{23}$$

と表現される．共役関数の意味は図形的にも理解しやすく，$n = 1$ の場合には，図 3 に示すように, $Y = f(x)$ のグラフの傾き p の接線の Y 切片 (Y 軸と交わる点の Y 座標) が $-f^{\bullet}(p)$ である．

写像 $f \mapsto f^{\bullet}$ は，凸解析の文献では **Fenchel 変換**あるいは **Legendre–Fenchel 変換**と呼ばれている．この変換の本質は式 (23) の方が見やすいが，これは **Legendre 変換**と呼ばれるもので，理工学のあらゆる分野に登場する．

例 1: 凸関数

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ +\infty & (x < 0) \end{cases} \tag{24}$$

の共役関数を式 (23) により計算すると，$f^{\bullet}(p) = \exp(p-1)$ となる． ■

共役関数 $f^{\bullet}$ の共役関数 $(f^{\bullet})^{\bullet}$ を f の**双共役関数**と呼ぶ．$(f^{\bullet})^{\bullet}$ は (各点での値が)f を超えないような最大の閉凸関数であり，f が閉真凸関数ならば $(f^{\bullet})^{\bullet}$ は f に一致する．

定理 2: 閉真凸関数 f に対して，$f^\bullet$ は閉真凸関数であり，$(f^\bullet)^\bullet = f$. ■

定義 (18) と定理 2 から, 閉真凸関数 f とベクトル $x, p \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} p \in \partial_{\mathbf{R}} f(x) & \Longleftrightarrow & x \in \arg\min f[-p] \\ & & \Updownarrow \\ & & f(x) + f^\bullet(p) = \langle p, x \rangle \\ & & \Updownarrow \\ x \in \partial_{\mathbf{R}} f^\bullet(p) & \Longleftrightarrow & p \in \arg\min f^\bullet[-x] \end{array} \tag{25}$$

の関係が成り立つことが分かる．

集合 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ に対し, その標示関数 $\delta_S : \mathbf{R}^n \to \{0, +\infty\}$ の共役関数 ${\delta_S}^\bullet$ は S の**支持関数**と呼ばれる．$S \neq \emptyset$ に対して

$${\delta_S}^\bullet(p) = \sup\{\langle p, x \rangle \mid x \in S\} \qquad (p \in \mathbf{R}^n) \tag{26}$$

は正斉次な閉真凸関数となる．なお，一般に関数 g が**正斉次**とは, 任意の $\lambda > 0$ と $p \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$g(\lambda p) = \lambda g(p) \tag{27}$$

が成り立つことを言う ($\mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$ ならば $g(0) = 0$ である)．定理 2 により，閉凸集合と正斉次閉真凸関数は 1 対 1 に対応する．大雑把に言えば，正斉次凸関数は凸集合の「裏の姿」である．例えば，真凸関数 f と $\mathrm{dom}\, f$ の相対的内点 x に対して，方向微分 $f'(x; d)$ は d の関数として正斉次閉真凸関数であり，劣微分 $\partial_{\mathbf{R}} f(x)$ の支持関数に等しい:

$$f'(x; d) = (\delta_{\partial_{\mathbf{R}} f(x)})^\bullet(d). \tag{28}$$

集合 S の標示関数 δ_S の双共役関数 $({\delta_S}^\bullet)^\bullet$ は S の閉凸包の標示関数に等しい．錐 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ に対して,

$$S^* = \{p \in \mathbf{R}^n \mid \langle p, x \rangle \leq 0 \ (\forall\, x \in S)\} \tag{29}$$

で定義される凸錐を S の**極錐** と呼ぶが，S^* の標示関数 δ_{S^*} は S の支持関数 ${\delta_S}^\bullet$ に等しい．S が閉凸錐ならば $(S^*)^* = S$ が成り立つ．

補足 3: 有界な多面体 S の支持関数を考えよう．S の頂点の集合を S^0 とすると，S は S^0 の凸包に等しく，また，容易に分かるように，${\delta_S}^\bullet = {\delta_{S^0}}^\bullet$ である．多面体 S は有限個の半空間の共通部分としても書けるが，その非冗長な表現を $S = \bigcap_k \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle p_k, x \rangle \leq b_k\}$ とすると，$b_k = {\delta_{S^0}}^\bullet(p_k)$ が成り立つ．このように, Legendre–Fenchel 変換は，凸多面体の「頂点 $(S^0) \leftrightarrow$ 面 (b_k, p_k)」の表現変換に対応している． ■

凸解析の真髄は双対性にある．双対性は様々な形をとって現れるが，ここでは分離定理と Fenchel 最大最小定理を述べる．

分離定理の基本は，二つの凸集合の分離に関するものである．

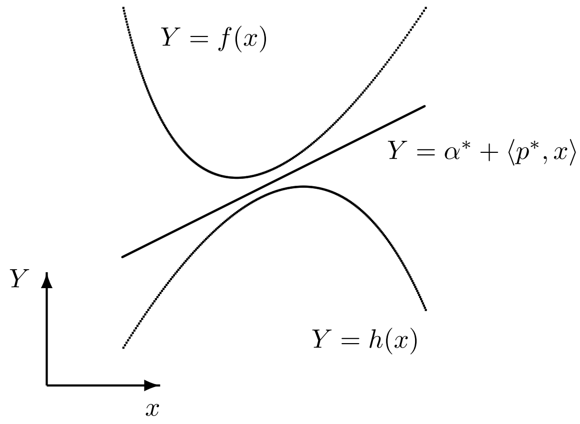

図 4: 凸関数と凹関数の分離定理

定理 4 (集合の分離定理): $S_1, S_2 \subseteq \mathbf{R}^n$ を空でない凸集合とする．

(1) $S_1 \cap S_2 = \emptyset \implies$ ある非ゼロベクトル $p^* \in \mathbf{R}^n$ が存在して

$$\inf\{\langle p^*, x\rangle \mid x \in S_1\} \geq \sup\{\langle p^*, x\rangle \mid x \in S_2\}. \tag{30}$$

さらに S_1 と S_2 が閉集合で少なくとも一方が有界ならば，$\geq$ を $>$ に置き換えることができる．

(2) $\mathrm{ri}\, S_1 \cap \mathrm{ri}\, S_2 = \emptyset \iff$ ある $p^* \in \mathbf{R}^n$ が存在して (30) かつ

$$\sup\{\langle p^*, x\rangle \mid x \in S_1\} > \inf\{\langle p^*, x\rangle \mid x \in S_2\}. \tag{31}$$

(証明) 証明は，[2] の Theorem 11.3, Theorem 20.2, Corollary 11.4.2 を参照されたい． ■

関数の分離定理は, 図 4 のように, 凸関数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ と凹関数 $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を分離するような 1 次関数の存在を主張するものである．

定理 5 (関数の分離定理): f を真凸関数, h を真凹関数とし, 条件

(a1) $\mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, f) \cap \mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, h) \neq \emptyset$,
(a2) f, h ともに多面体的で，$\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h \neq \emptyset$,

のいずれかが成り立つとする．$f(x) \geq h(x)$ $(\forall\, x \in \mathbf{R}^n)$ ならば, ある $\alpha^* \in \mathbf{R}$, $p^* \in \mathbf{R}^n$ が存在して,

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x\rangle \geq h(x) \quad (\forall\, x \in \mathbf{R}^n). \tag{32}$$

(証明) 条件 (a1) を仮定する．$S_1 = \{(x, Y) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid Y \geq f(x)\}$, $S_2 = \{(x, Y) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid Y \leq h(x)\}$ は凸集合で，$\mathrm{ri}\, S_1 \cap \mathrm{ri}\, S_2 = \emptyset$. 定理 4(2) により，

ある $(-p^*, p_0^*) \in \mathbf{R}^{n+1}$ によって S_1 と S_2 は (30), (31) のように分離される:

$$\begin{aligned}\inf\{-\langle p^*, x\rangle + p_0^* Y \mid (x, Y) \in S_1\} &\geq \sup\{-\langle p^*, x\rangle + p_0^* Y \mid (x, Y) \in S_2\},\\ \sup\{-\langle p^*, x\rangle + p_0^* Y \mid (x, Y) \in S_1\} &> \inf\{-\langle p^*, x\rangle + p_0^* Y \mid (x, Y) \in S_2\}.\end{aligned}$$

もし $p_0^* = 0$ とすると，$S_1' = \mathrm{dom}\, f$ と $S_2' = \mathrm{dom}\, h$ が $-p^*$ によって (30), (31) のように分離されることになるが，これは定理 4(2) により仮定 (a1) に反する．したがって，$p_0^* \neq 0$ であるが，このとき $p_0^* > 0$ なので $p_0^* = 1$ としてよい．$\alpha^* = \inf\{-\langle p^*, x\rangle + Y \mid (x, Y) \in S_1\}$ とすれば (32) が成立する．

条件 (a2) の場合の証明は省略する． 詳細は [3] の Cor. 5.1.6, [2]Th. 31.1 の証明を参照されたい． ■

Fenchel 双対定理 (**Fenchel 最大最小定理**) は，凸関数と凹関数の組 (f, h) とそれらの共役関数の組 $(f^\bullet, h^\circ)$ の間に成り立つ量的な双対関係を主張する定理である．Fenchel 双対定理と分離定理は，見かけは異なるが，その本質は同じ事柄を述べている定理である．

定理 6 (Fenchel 双対定理): f を真凸関数, h を真凹関数とする．条件

(a1) $\mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, f) \cap \mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, h) \neq \emptyset$,
(a2) f, h ともに多面体的で，$\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h \neq \emptyset$,
(b1) f は閉凸関数, h は閉凹関数で，$\mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, f^\bullet) \cap \mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, h^\circ) \neq \emptyset$,
(b2) f, h ともに多面体的で，$\mathrm{dom}\, f^\bullet \cap \mathrm{dom}\, h^\circ \neq \emptyset$,

のいずれかが成り立つならば,

$$\inf\{f(x) - h(x) \mid x \in \mathbf{R}^n\} = \sup\{h^\circ(p) - f^\bullet(p) \mid p \in \mathbf{R}^n\}. \qquad (33)$$

さらに，この両辺が有限値ならば，(a1) または (a2) の下で sup を達成する $p \in \mathrm{dom}\, f^\bullet \cap \mathrm{dom}\, h^\circ$ が存在し，(b1) または (b2) の下で inf を達成する $x \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h$ が存在する．

(証明) まず，共役関数の定義 (21), (22) より，任意の x と p に対して

$$f^\bullet(p) \geq \langle p, x\rangle - f(x), \qquad h^\circ(p) \leq \langle p, x\rangle - h(x)$$

が成り立つので，(33) の $\inf \geq \sup$．ここで $\inf = -\infty$ または $\sup = +\infty$ ならば (33) が成立する．条件 (a1) または (a2) が成り立つとき，$\inf = \Delta$ (有限値) として，$(f - \Delta, h)$ に定理 5 を適用すると，ある $\alpha^* \in \mathbf{R}$, $p^* \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$f(x) - \Delta \geq \alpha^* + \langle p^*, x\rangle \geq h(x) \qquad (\forall\, x \in \mathbf{R}^n)$$

となる．これより $f^\bullet(p^*) \leq -\alpha^* - \Delta$, $h^\circ(p^*) \geq -\alpha^*$ となり，$\inf = \Delta \leq h^\circ(p^*) - f^\bullet(p^*) \leq \sup$ が示される (とくに p^* が sup を達成する)．条件 (b1) または (b2) が成り立つときには，定理 2 により $(f^\bullet)^\bullet = f$, $(h^\circ)^\circ = h$ が成り

立つので，$(f^{\bullet}, h^{\circ})$ に対して同様の議論ができる (多面体的凸関数の共役関数は多面体的凸関数である)． ■

例 7: 式 (24) の凸関数 f と $h(x) = -f(-x)$ で定義される凹関数 h に対して分離定理と Fenchel 双対定理を考えよう．$f(x) \geq h(x)$ $(\forall\, x)$ であるが，$Y = f(x)$ と $Y = h(x)$ のグラフはともに原点 $(0,0)$ で Y 軸に接するので，これを分離する 1 次関数は存在しない (定理 5 の条件が満たされていない)．共役関数は $f^{\bullet}(p) = \exp(p-1)$, $h^{\circ}(p) = -\exp(p-1)$ となるので，

$$f(x) - h(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ +\infty & (x \neq 0), \end{cases} \qquad h^{\circ}(p) - f^{\bullet}(p) = -2\exp(p-1) \quad (34)$$

である．したがって，式 (33) の両辺とも 0 に等しい．ここで，定理 6 の条件 (b1) が満たされ，(a1) は満たされていないこと，および，式 (33) の inf は $x = 0$ で達成されるのに対し，sup を達成する p が存在しないことに注意されたい． ■

例 8: 2 変数の凸関数 f，凹関数 h を

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \begin{cases} 0 & (x_1 = 0, x_2 \geq 0) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases} \\ h(x_1, x_2) &= \begin{cases} 1 & (x_1 x_2 \geq 1, x_1 > 0, x_2 > 0) \\ \sqrt{x_1 x_2} & (x_1 x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0) \\ -\infty & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

で定義する．式 (33) において，$\inf = 0$, $\sup = -1$ となり両者は等しくない．$\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h \neq \emptyset$, $\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, h) = \mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, f) \cap \mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, h) = \emptyset$ であり，$\mathrm{dom}\, f^{\bullet} = \{(p_1, p_2) \mid p_2 \leq 0\}$, $\mathrm{dom}\, h^{\circ} = \{(p_1, p_2) \mid p_1 \geq 0, p_2 \geq 0\}$ より $\mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, f^{\bullet}) \cap \mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, h^{\circ}) = \emptyset$ である．したがって，定理 6 の 4 条件 (a1)〜(b2) のどれも満たされていない． ■

二つの関数 $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ $(i = 1, 2)$ に対して，**合成積** (infimal convolution) $f_1 \Box f_2 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ を

$$(f_1 \Box f_2)(x) = \inf\{f_1(x_1) + f_2(x_2) \mid x = x_1 + x_2, x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n\} \quad (x \in \mathbf{R}^n) \tag{35}$$

と定義する．$f_1 \Box f_2$ が $-\infty$ にならないとき，

$$\mathrm{dom}\,(f_1 \Box f_2) = \mathrm{dom}\, f_1 + \mathrm{dom}\, f_2 \tag{36}$$

である (右辺は集合の Minkowski 和)．合成積と和は Legendre–Fenchel 変換に関する共役な演算であり，適当な前提条件を満たす凸関数に対して次の関係が成り立つ:

$$(f_1 \Box f_2)^{\bullet} = {f_1}^{\bullet} + {f_2}^{\bullet}, \tag{37}$$

$$(f_1 + f_2)^{\bullet} = {f_1}^{\bullet} \Box {f_2}^{\bullet}. \tag{38}$$

第 1 の関係式 (37) は，任意の真凸関数 $f_1,\ f_2$ に対して成り立ち，その証明も定義より容易である．第 2 の関係式 (38) は，Fenchel 双対定理 6 と同等の主張であり，前提条件として，例えば，$\mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, f_1) \cap \mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, f_2) \neq \emptyset$ を仮定する必要がある．

参考文献

[1] 福島雅夫: 非線形最適化の基礎，朝倉書店，東京， 2001.

[2] R. T. Rockafellar: *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[3] J. Stoer and C. Witzgall: *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

以上