Fenchel 双対定理

Fenchel 双対定理の記述と LP 双対定理

定理 1 (Fenchel 双対定理 (行列を含む形)): $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ はともに凸関数，A は $m \times n$ 行列とする．適当な付帯条件[1]の下で，

$$\inf_{x \in \mathbf{R}^n} (f(x) + g(Ax)) = \sup_{p \in \mathbf{R}^m} (-f^\bullet(A^\top p) - g^\bullet(-p)). \tag{1}$$

ただし，

$$f^\bullet(q) = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (\langle q, x \rangle - f(x)), \quad g^\bullet(p) = \sup_{z \in \mathbf{R}^m} (\langle p, z \rangle - g(z)) \tag{2}$$

（Legendre 変換）.

線形計画の双対定理が (1) の特殊ケースであることを説明する．

$$\begin{array}{lll|lll} \text{[主問題 LP-P]} & & & \text{[双対問題 LP-D]} & & \\ \text{Minimize} & c^\top x & & \text{Maximize} & b^\top y & \\ \text{subject to} & Ax \geq b & & \text{subject to} & A^\top y = c & \\ & & & & y \geq \mathbf{0} & \end{array} \tag{3}$$

LP-P が Fenchel 双対定理の主問題（式 (1) の左辺）になるように

$$f(x) = c^\top x, \qquad g(z) = \ \{z \mid z \geq b\} \text{ の標示関数}$$

と選ぶ．これの共役関数を計算すると，

$$f^\bullet(q) = \sup_x \langle q - c, x \rangle = \begin{cases} 0 & (q = c) \\ +\infty & (q \neq c) \end{cases}$$

$$g^\bullet(p) = \sup_{z \geq b} \langle p, z \rangle = \begin{cases} \langle p, b \rangle & (p \leq \mathbf{0}) \\ +\infty & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

となるので，Fenchel 双対定理の双対問題（式 (1) の右辺）は

$$\sup_p (-f^\bullet(A^\top p) - g^\bullet(-p)) = \sup_{A^\top p = c, p \geq \mathbf{0}} \langle p, b \rangle.$$

これは (p を y に書き換えれば)LP-D に一致している．

[1]たとえば，f, g が閉真凸関数で，$A \mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, f) \cap \mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, g) \neq \emptyset$ ならよい．

分離定理による Fenchel 双対定理の証明

証明の方針：　凸関数の分離定理 $\Rightarrow$ Fenchel 双対定理 (行列を含まない形)
$\Rightarrow$ Fenchel 双対定理 (行列を含む形)

定理 2 (Fenchel 双対定理 (行列を含まない形)): $f, g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ はともに凸関数とする．適当な付帯条件[2]の下で，

$$\inf_{x \in \mathbf{R}^n} (f(x) + g(x)) = \sup_{p \in \mathbf{R}^n} (-f^\bullet(p) - g^\bullet(-p)). \tag{4}$$

凸関数の分離定理 $\Rightarrow$ Fenchel 双対定理 (行列を含まない形)

まず，Legendre 変換の定義より，任意の x と p に対して

$$f^\bullet(p) \geq \langle p, x \rangle - f(x), \qquad g^\bullet(-p) \geq -\langle p, x \rangle - g(x)$$

が成り立つので，

$$f(x) + g(x) \geq -f^\bullet(p) - g^\bullet(-p).$$

したがって，(4) の inf $\geq$ sup (弱双対性).

ここで inf $= -\infty$ または sup $= +\infty$ ならば (4) が成立する．inf $= +\infty$ の場合は除外する（実際,「付帯条件」なしでは inf $= +\infty$, sup $= -\infty$ となることもある）．以下，inf $= \Delta$ (有限値) と仮定する．

$(f, \Delta - g)$ に凸関数の分離定理を適用すると，ある $\alpha^* \in \mathbf{R}$, $p^* \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x \rangle \geq \Delta - g(x) \qquad (\forall\, x \in \mathbf{R}^n)$$

となる．これより

$$\begin{aligned} f^\bullet(p^*) &= \sup_x (\langle p^*, x \rangle - f(x)) \leq -\alpha^*, \\ g^\bullet(-p^*) &= \sup_x (-\langle p^*, x \rangle - g(x)) \leq \alpha^* - \Delta \end{aligned}$$

となり，

$$\inf = \Delta \leq -f^\bullet(p^*) + -g^\bullet(-p^*) \leq \sup.$$

とくに p^* が sup を達成する．

[2]たとえば，f, g が閉真凸関数で，$\mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, f) \cap \mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, g) \neq \emptyset$ ならよい．詳しくは [1] の定理 2.8 参照.

Fenchel 双対定理 (行列を含まない形) $\Rightarrow$ Fenchel 双対定理 (行列を含む形)

正則行列 S, T を用いて，

$$\tilde{A} = S^{-1}AT,\ \tilde{x} = T^{-1}x,\ \tilde{p} = S^{\top}p,\ \tilde{f}(x) = f(Tx),\ \tilde{g}(z) = g(Sz)$$

と変換すると，式 (1) は

$$\inf_{\tilde{x}\in\mathbf{R}^n} (\tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}(\tilde{A}\tilde{x})) = \sup_{\tilde{p}\in\mathbf{R}^m} (-\tilde{f}^{\bullet}(\tilde{A}^{\top}\tilde{p}) - \tilde{g}^{\bullet}(-\tilde{p})) \tag{5}$$

となる．したがって，最初から A が階数標準形 $A = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ になっていると仮定して良い．これに対応して，$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ と分割すると，式 (1) は

$$\inf_{x_1,x_2} (f(x_1,x_2) + g(x_1,\mathbf{0})) = \sup_{p_1,p_2} (-f^{\bullet}(p_1,\mathbf{0}) - g^{\bullet}(-p_1,-p_2)) \tag{6}$$

となる．一般に，

$$\hat{f}(x_1) = \inf_{x_2} f(x_1,x_2), \qquad \check{g}(x_1) = g(x_1,\mathbf{0})$$

で定義される $\hat{f}$ を f の射影，$\check{g}$ を g の制限と呼ぶことにする．この記号によれば，式 (6) は

$$\inf_{x_1}(\hat{f}(x_1) + \check{g}(x_1)) = \sup_{p_1}(-(f^{\bullet})\check{}(p_1) - (g^{\bullet})\hat{}(-p_1)) \tag{7}$$

と書きなおせる．ここで，$(f^{\bullet})\check{}$ は f の共役関数 $f^{\bullet}$ の制限，$(g^{\bullet})\hat{}$ は g の共役関数 $g^{\bullet}$ の射影である．さらに，下の補題により，式 (7) の右辺は

$$\sup_{p_1}(-(\hat{f})^{\bullet}(p_1) - (\check{g})^{\bullet}(-p_1))$$

に等しいので，定理 2 により，式 (7) が成り立つことが分かる．

補題 3: 射影の共役 $(\hat{f})^{\bullet}$ = 共役の制限 $(f^{\bullet})\check{}$,
制限の共役 $(\check{f})^{\bullet}$ =共役の射影 $(f^{\bullet})\hat{}$.

(証明) 第 1 式は

$$\hat{f}^{\bullet}(p_1) = \sup_{x_1}(\langle p_1, x_1\rangle - \hat{f}(x_1)) = \sup_{x_1,x_2} (\langle p_1, x_1\rangle - f(x_1,x_2)) = f^{\bullet}(p_1,\mathbf{0})$$

による．第 1 式の両辺の共役をとると，$\hat{f} = ((f^{\bullet})\check{})^{\bullet}$ となるが，この f を $f^{\bullet}$ に置き換えて，$(f^{\bullet})^{\bullet} = f$ を用いると，第 2 式が得られる． ■

参考文献

[1] 室田一雄： 離散凸解析, 共立出版, 東京 2001.

以上