整数計画と LP の整数性

数理計画法 講義資料 (2010-12-22)

1 整数計画

線形計画において変数の値を整数に限定した問題を，**整数計画**と呼ぶ．例えば，

$$\begin{array}{lrcl} \text{Max.} & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \qquad & \leq & 1 \\ & x_2 + x_3 & \leq & 1 \\ & x_1 \qquad + x_3 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{Z} & & \end{array} \tag{1}$$

のような問題である．この問題の最適解は $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ で，目的関数の最大値は 5 である．問題 (1) において，整数条件 $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{Z}$ を外すと

$$\begin{array}{lrcl} \text{Max.} & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \qquad & \leq & 1 \\ & x_2 + x_3 & \leq & 1 \\ & x_1 \qquad + x_3 & \leq & 1 \end{array} \tag{2}$$

という線形計画問題となるが，この問題の最適解は $(1/2, 1/2, 1/2)$ で，目的関数の最大値は 6 である．整数条件の有無によって最大値が変わるということは，整数条件が本質的な役割を果たしているということである．

別の整数計画問題

$$\begin{array}{lrcl} \text{Max.} & 3x_1 + 4x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbf{Z} & & \end{array} \tag{3}$$

を考える．実行可能解は図 1 の黒丸 (●) で示した点であり，最適解は $(x_1, x_2) = (2, 1)$，目的関数の最大値は 10 である．整数条件を外して得られる線形計画問題においても，同じ点 $(x_1, x_2) = (2, 1)$ が最適解である．すなわち，問題 (3) においては，整数条件は本質的な

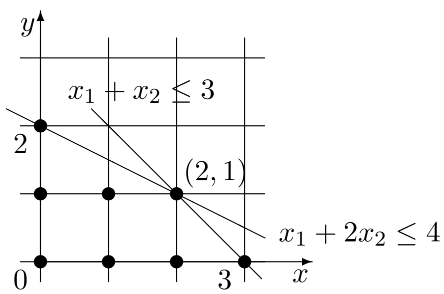

図 1: 線形計画に帰着する整数計画

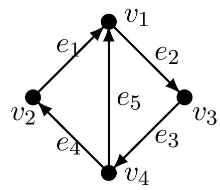

図 2: 有向グラフ

制約になっていない．逆の言い方をすると，(3) に対応する線形計画問題においては，問題を記述するデータ（係数）の整数性が最適解の整数性に反映されて，最適解が整数ベクトルになっている．

上の二つ目の例のように，線形計画問題において行列 A やベクトル b, c の要素が整数のとき，最適解が整数ベクトルになる場合がある．そのような構造を次に考察しよう．

2　完全単模性

整数を要素とする行列を**整数行列**という．正方形の整数行列は，行列式の値が 1 または -1 であるとき，**単模行列** (あるいは**ユニモジュラ行列**) と呼ばれる．

定理 1 単模行列の逆行列は，整数行列で，さらに単模行列である．

証明：A が単模行列とすると，$\det A = \pm 1$ である．A^{-1} の各要素は，余因子 / $\det A$ の形なので，整数になる．$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$ より，$\det A^{-1} = \pm 1$ となるので，A^{-1} も単模行列である．(証明終)

例 1 問題 (3) の係数行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ は単模行列であり，その逆行列 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ は整数行列である．■

（正方形とは限らない）整数行列は，任意の小行列式の値が 0, 1, -1 のいずれかであるとき，**完全単模行列**と呼ばれる．完全単模行列の各要素は 0, 1, -1 のいずれかである．例 1 の行列は，単模であるが完全単模ではない．

グラフの構造を表わす行列は，完全単模行列の重要な例である．有向グラフが与えられたとき，点の番号を行番号，枝の番号を列番号とする行列 A で，枝 $e = (i, j)$ に対応する列の要素が $a_{ie} = 1$, $a_{je} = -1$（その他は 0）で与えられる行列をそのグラフの**接続行列**と呼ぶ．例えば，図 2 のグラフの接続行列は

$$A = \begin{array}{c|ccccc|} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline v_1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ v_3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad (4)$$

である．

定理 2 任意のグラフの接続行列は完全単模である．

証明： 接続行列の任意の正方小行列 B に対して $\det B \in \{0, 1, -1\}$ であることを，B のサイズに関する帰納法により証明する．B のサイズが 1 ならば，これは成立する．B のサイズが 2 以上のとき，次の三つの場合に分けられる．

(a) B の列の中にゼロベクトルがある場合には，$\det B = 0$ である．

(b) B の列の中に ($\pm$ 単位ベクトル) がある場合には，ラプラス展開により，$\det B$ はサイズの一つ小さい小行列式に（符号を除いて）等しい．

(c) B の各列が丁度一つずつ 1, -1 を含む場合には，B の行ベクトルの和はゼロベクトル（行ベクトルは線形従属）であり，$\det B = 0$ である．(証明終)

補足 1 完全単模行列 A に対して，次の行列はすべて完全単模である：

$$A^\top, \quad \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & -A \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A^\top & -A^\top & I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & -A \\ I & -I \end{bmatrix}.$$

■

3 LP の整数性

次の線形計画問題を考える：

$$\begin{array}{ll|ll} \text{[主問題 P]} & & \text{[双対問題 D]} & \\ \text{Minimize} & c^\top x & \text{Maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & Ax = b & \text{subject to} & A^\top y \leq c \\ & x \geq \mathbf{0} & & \end{array} \tag{5}$$

ここで A は $m \times n$ 行列, b は m 次元ベクトル, c は n 次元ベクトルとする．

行列 A が完全単模ならば，問題を記述するデータの整数性が最適解に遺伝する．

定理 3 線形計画問題 (5) は最適解をもち，行列 A は完全単模とする．

(1) b が整数ベクトルならば，問題 P は整数最適解 $x \in \mathbf{Z}^n$ をもつ．

(2) c が整数ベクトルならば，問題 D は整数最適解 $y \in \mathbf{Z}^m$ をもつ．

証明： (1) 基底 A_B の定める基底解は $(A_B^{-1}b, \mathbf{0})$ である．ここで，A_B が単模行列なので A_B^{-1} は整数行列であり，したがって，$A_B^{-1}b$ は整数ベクトルになる．

(2) 問題 D は，標準形問題 P において A, b, c を

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A^\top & -A^\top & I \end{bmatrix}, \qquad \tilde{b} = c, \qquad \tilde{c} = \begin{bmatrix} -b^\top & b^\top & \mathbf{0}^\top \end{bmatrix}^\top \tag{6}$$

に置き換えた問題と等価である．ここで，$\tilde{A}$ は完全単模行列，$\tilde{b}$ は整数ベクトルとなるので，(1) により主張が成り立つ．(証明終)

補足 2 定理 3 の証明から分かるように，問題 P の整数性のためには，A の完全単模性は必要なく，「A の任意の m 次小行列式が 0, 1, -1 のいずれかである」という条件でよい．次の定理 (Hoffman–Kruskal の定理) が知られている：

A を $m \times n$ 整数行列とする．任意の整数ベクトル $b \in \mathbf{Z}^m$ に対して多面体 $\{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \le b, x \ge \mathbf{0}\}$ が整数多面体であるための必要十分条件は A が完全単模であることである．

なお，整数多面体とは（有理数で定義された多面体で）任意の面が整数ベクトルを含むような多面体をいう．有界な多面体の場合，すべての頂点が整数ベクトルであることと同値である． ■

整数条件を加味したとき，次のような双対性が成り立つ：

$$\begin{aligned} &\inf\{c^\top x \mid x \in P, x \in \mathbf{Z}^n\} \ \ge \ \inf\{c^\top x \mid x \in P\} \\ &= \ \sup\{b^\top y \mid y \in D\} \ \ge \ \sup\{b^\top y \mid y \in D, y \in \mathbf{Z}^m\}. \end{aligned} \tag{7}$$

ただし，P, D は問題 P, 問題 D の実行可能領域を表わす．一般には，上の二つの不等号「$\ge$」は真の不等号「$>$」になることが多いが，定理 3 より，行列 A が完全単模ならば，これが等号「$=$」になって，整数条件の下での強双対性が成立することになる．

例：最大流問題は，完全単模行列を係数行列とする線形計画問題である．目的関数のベクトルは $(1, 0, \ldots, 0)$ の形の整数ベクトルであり，右辺ベクトルは枝容量を並べたベクトルである．
・したがって，双対問題は（枝容量の整数性とは無関係に常に）整数最適解をもつ．この最適解は点集合上の $\{0, 1\}$ ベクトルで表され，カットに対応する．このようにして，最大流問題の双対問題は，最小カット問題に一致する．
・枝容量が整数のときには，主問題が整数最適解をもつことになる．これが最適流の整数性である．

例：（線形費用の）最小費用流問題は，完全単模行列を係数行列とする線形計画問題である．

例：最短路問題は，完全単模行列を係数行列とする線形計画問題である．

参考文献

[1] W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, and A. Schrijver: *Combinatorial Optimization*, John Wiley and Sons, New York, 1998.

[2] A. Schrijver: *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley and Sons, New York, 1986.

[3] A. Schrijver: *Combinatorial Optimization—Polyhedra and Efficiency*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.

以上